Stephan Weiss

Anmerkungen zur Idee der historischen Logarithmen[1]

Inhalt

Einleitung 2

Ausgangspunkt 3

Die Prosthapärese 3

Michael Stifel 4

John Napier 6

Johannes Kepler 20

Späte Napier-Tafeln 21

Henry Briggs 22

Jost Bürgi 29

Was sind Logarithmen? 33

Die Frage nach der Basiszahl 34

Die Situation nach Napier 35

Logarithmische Rechengeräte 38

Grosse Tafeln und ihre Fehler 39

Diskrete Logarithmen 41

Anhang 1: Ein Rechenbeispiel nach der prosthaphäretischen Methode 45

Anhang 2: Napier – Eine Logarithmentafel anordnen 46

Anhang 3: Rechenbeispiele mit Logarithmen 47

Anh. 3.1: Beispiel Briggs 47

Anh. 3.2: Beispiel Napier 48

Anh. 3.3: Beispiel Bürgi 50

Bildnachweis 52

Literatur 52

[1] Der Aufsatz ist die überarbeitete und erweitere Fassung eines früheren mit gleichem Thema aus dem Jahr 2010.

Einleitung

Wer sich erstmals intensiver mit der Geschichte der Logarithmen befasst und nicht nur mit der Aussage zufrieden geben will, John Napier sei deren Erfinder gewesen, wird bald zwei Feststellungen machen: erstens hat man in der Vergangenheit Logarithmen alleinig als Werkzeug zur Vereinfachung des Rechnens gesehen und zweitens brachte die Erstellung von Logarithmensystemen und deren Anpassung an die Verwendung zunächst unterschiedliche Systeme hervor. Dieser Aufsatz greift beide Feststellungen als Themen auf, zusammengefasst unter dem Oberbegriff Idee der Logarithmen. Diese Ideen, die hinter der Entwicklung von Logarithmen standen, sollen als roter Faden dienen. Es wird sich zudem zeigen, dass die zuweilen stark verkürzte Darstellung ihrer Geschichte mit der Aussage Napier hat die Logarithmen erfunden und Briggs hat sie verbessert andere Parallelentwicklungen ausser Acht lässt. Vielmehr haben die Napierschen Logarithmen eine Vorgeschichte und ihre eigene wenn auch nur kurze Geschichte.
Auf die Unterschiede in der Definition historischer und moderner Logarithmen sowie auf die Frage nach der Basiszahl historischer Logarithmensysteme wird ebenfalls eingegangen. Ein weiterer Abschnitt befasst sich mit den Fehlern in Logarithmentafeln – einem Phänomen, das die Geschichte der Logarithmen vor allem im 19. Jahrhundert erheblich beeinflusst hat.

Obwohl der Werdegang der Logarithmen nicht unabhängig von anderen formenden Begleitumständen gesehen werden kann waren dennoch Abgrenzungen erforderlich. Deshalb kann auf Randgebiete wie die Rechentechniken der Trigonometrie, den Aufbau bereits vorhandener Zahlentafeln, die mathematischen Werkzeuge, die zur Verfügung standen und vor allem die anfangs uneinheitliche Schreibweise von Dezimalbrüchen nur hingewiesen werden. Ebenso bleiben ausführliche Biografien der historischen Akteure unberücksichtigt. Verfahren zur Berechnung von Logarithmen werden nur angesprochen. In diesen Einschränkungen gründet auch die Wahl des Zusatzes Anmerkungen im Titel. Stattdessen wird in jedem Abschnitt auf eine umfangreiche Literaturliste verwiesen, die dem Leser in nahezu allen Fragen zum jeweiligen Abschnitt weiterhelfen kann. Im Anhang werden Beispielrechnungen gegeben, weil praktische Rechnungen in verschiedenen Logarithmensystemen deren Eigenschaften verständlicher machen als eine nur theoretische Erklärung.

Zahlentafeln gehören ebenso wie der logarithmische Rechenschieber zu den historischen Rechenhilfen, die elektronische Rechner haben nutzlos werden lassen. Tafeln mit Logarithmen oder mit Werten für Winkelfunktionen sind heute nicht mehr in Gebrauch, sie sind möglicherweise jüngeren Lesern nicht einmal mehr bekannt. Dennoch muss ich im Umgang mit Zahlentafeln und vor allem mit Logarithmen ein Grundwissen voraussetzen, ohne das der Aufsatz schwer verständlich wird und möglicherweise sein Ziel nicht erreicht.

Der Weg von den Anfängen zu den grossen Logarithmentafeln des 18., 19. und 20. Jahrhunderts war zunächst alles andere als geradlinig. Wie sich zeigen wird gilt für die ersten Tafeln das gleiche was John Napier mit Bescheidenheit schon am Schluss seiner eigenen Tafel geschrieben hat:

Nihil in ortu perfectum (nichts ist von Anfang an vollkommen).

Ausgangspunkt

Die Mathematik kennt verschiedene Anwendungsbereiche des Logarithmus. Für die folgenden Betrachtungen ist deren anfänglicher und ältester Nutzen massgebend. Er zielt alleinig auf Verfahren zur Vereinfachung von numerischen Rechnungen ab. Umfangreiche Berechnungen mit vielstelligen Zahlen in Astronomie, Navigation und Geodäsie liessen die Suche nach solchen Vereinfachungen dringlich werden.
Ein altes Verfahren, noch älter als die Logarithmen, besteht in der prosthaphäretischen Methode.

Die Prosthaphärese

Als Begründer dieser Methode, in der älteren Literatur auch *Prosthaphairesis* genannt, gilt der Pfarrer und Astronom Johannes Werner (1468 – 1528) aus Nürnberg. In seinen Werken zur Trigonometrie findet man Formeln wie (hier in moderner Schreibweise)

$$\sin\alpha \times \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

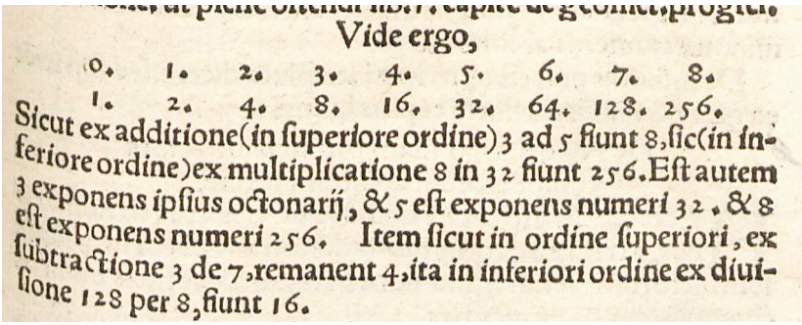
oder $$\cos\alpha \times \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \ .$$

Mit ihrer Hilfe kann die Multiplikation von zwei Sinus- oder zwei Cosinuswerten auf Additionen und Subtraktionen ihrer Winkel reduziert werden. Für die Anwendung sind Tafeln der Werte der Winkelfunktionen mit möglichst grosser Stellenzahl erforderlich. Soll eine Multiplikation ausgeführt werden transformiert man die Produktfaktoren x und y in Winkel α und β. Diese werden addiert und subtrahiert, mit der Tafel wieder zu Werten der Winkelfunktionen gemacht, nochmals addiert oder subtrahiert, durch 2 geteilt und über die Tafel zum gesuchten Ergebnis rückübertragen. Anhang 1 führt ein Rechenbeispiel vor.
Das Verfahren hat man im Laufe der Zeit verfeinert und zu einer Rechenmethode entwickelt, die bis weit in das 17. Jahrhundert hinein als Grundlage von astronomischen Rechenverfahren dient, bis es schliesslich von Logarithmen abgelöst wird [6, 43].

Ein weiteres historisches Verfahren mit dem Ziel einer vereinfachten Rechnung besteht in der Zuordnung der Glieder einer arithmetischen und einer geometrischen Folge. In einer arithmetischen Folge $a, a + d, a + 2d, a + 3d$... ist die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder $a_{n+1} - a_n = d$ konstant, in einer geometrischen Folge c, cq, cq^2, cq^3... ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $c_{n+1} / c_n = q$ konstant. In dieser Zuordnung liegt der Anfang der Logarithmen.

Michael Stifel

Das Prinzip des logarithmischen Rechnens wird vom deutschen Mathematiker Michael Stifel (um 1487–1567) klar formuliert.[2] In seiner *Arithmetica Integra* von 1544 stellt er auf fol. 249v. eine arithmetische Folge einer geometrischen Folge gegenüber, um zu zeigen wie man vereinfacht rechnen könnte.


Vide ergo,

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

Sicut ex additione (in ſuperiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, ſic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Eſt autem 3 exponens ipſius octonarij, & 5 eſt exponens numeri 32. & 8 eſt exponens numeri 256. Item ſicut in ordine ſuperiori, ex ſubtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuiſione 128 per 8, fiunt 16.

Der oben gezeigte Abschnitt lautet in der Übersetzung:

„Sehe also:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Wie aus der Addition (in der oberen Reihe) aus 3 und 5 dann 8 wird, so wird (in der unteren Reihe) aus der Multiplikatin von 8 mit 32 dann 256. Es ist aber 3 Exponent von acht selbst, und 5 ist der Exponent der Zahl 32, und 8 ist der Exponent der Zahl 256. Wie ebenso in der oberen Reihe aus der Subtraktion von 3 von 7 dann 4 übrig bleibt, so wird in der unteren Reihe durch die Division von 128 durch 8 dann 16.“[3]

Stifel erläutert, dass man mit einer einfachen Tabelle dieser Art die Zahlen in der unteren Zeile multiplizieren oder dividieren kann. Man muss nur die zu jeder Zahl gehörige obere Zahl, den Exponenten, aufsuchen und diese dann addieren bzw. subtrahieren. Unter dem neuen Zwischerergebnis, in der oberen

---

[2] Gegenüberstellungen geometrischer und arithmetischer Folgen finden sich bei Archimedes (3. Jhd. v. Chr.) sowie in fast allen bedeutenden mathematischen Werken des 15. und 16. Jahrhunderts [38, 62, 64, bes. 80].

[3] Die Übersetzung ist aus Stifel 2007 [60], S. 362 entnommen.

Zeile aufgesucht, steht das gesuchte Ergebnis. Die Rechenarten Multiplikation und Division werden auf diesem Weg durch die einfacheren Rechenarten Addition und Subtraktion ersetzt.

Die arithmetische Folge in der Darstellung oben bei Stifel beginnt mit 0 und wächst von links nach rechts von Glied zu Glied um die Differenz 1. Darunter steht die geometrische Folge, die mit 1 beginnt und nach rechts die Vorgängerzahl verdoppelt oder, anders gesagt, der Quotient zweier benachbarter Zahlen b_{n+1} / b_n beträgt immer 2. An anderer Stelle auf fol. 249v. wird auch eine arithmetische Folge gezeigt, die nach links mit negativen Werten besetzt ist. Ihnen entsprechen Bruchteile in der geometrischen Folge.

In der Tabelle ist unschwer zu erkennen, dass sie auf der Basis $b = 2$ aufbaut und in der oberen Zeile die Exponenten[4] n und in der unteren Zeile die Potenzen 2^n aufgelistet sind. Von einer Basiszahl und von Potenzen der Basis ist im Text keine Rede, eine solche Zahlendarstellung ist noch unbekannt.

Mit der Tabelle kann man zwar wie gezeigt rechnen, da Stifel aber nur ganzzahlige Exponenten verwendet, beinhaltet sie Lücken, die mit zunehmenden Zahlenwerten immer grösser werden. Eine Rechnung wie etwa 17×31 ist nicht möglich, weil die Produktfaktoren 17 und 31 nicht in der Tabelle enthalten sind. Auch der Begriff Logarithmen taucht nicht auf, er wird erst später geschaffen. Bezeichnet man dennoch der Einfachheit halber in obiger Tabelle die Zahlen der Zeile oben als Logarithmen nach Stifel und die Zahlen der Zeile unten als Numeri (veraltet Logarithmand genannt) a oder c so kann man schreiben[5]

$$logStif\,(a \times c) = logStif\,a + logStif\,c \quad \text{und}$$

$$logStif\,(a / c) = logStif\,a - logStif\,c \quad \text{sofern } logStif\,n \text{ ganzzahlig}$$

sowie $logStif\,1 = 0$ wegen $2^0 = 1$. Wie weiter unten noch gezeigt werden wird handelt es sich mit dieser Festlegung um einen Sonderfall in der Gegenüberstellung arithmetischer und geometrischer Folgen.

Man kann die Tabelle eine sehr einfache Logarithmentabelle zur Vereinfachung des Zahlenrechnens ansehen mit der bereits genannten Einschränkung. Für die Berechnung der Zwischenwerte fehlt Stifel ein geeignetes mathematisches Werkzeug, zudem sind einheitliche Schreibweisen für Potenzen und Dezimalbrüche noch nicht gebräuchlich. Als wesentlicher Punkt bleibt festzuhalten,

---

[4] Im Original lat. *exponens* "heraussetzend", "herausstellen". Das Wort bezeichnet etwas, das an herausragender Stelle vermerkt ist.

[5] Im Folgenden bezeichnen ***log*** den Logarithmus zur Basis 10, ***ln*** den Logarithmus zur Basis *e* sowie *log* in Verbindung mit der Kurzform eines Namens (*logStif*, *logNep* und andere) den Logarithmus in einem anderen System. Mit diesen Unterscheidungen sind Verwechslungen ausgeschlossen.

dass die Grundlagen des logarithmischen Rechnens spätestens mit Stifel seit der Mitte des 16. Jahrhunderts bekannt sind.

Anfang des 17. Jahrhunderts treten kurz nacheinander einige Mathematiker auf, die die Berechnung von Logarithmen und die Erstellung der Tafeln massgeblich voranbringen.

John Napier

Mit seinen drei Rechenhilfen *Rabdologia* (Rechenstäbchen), *Promptuarium Multiplicationis* und *Arithmetica Localis* ebenso wie mit seinen Logarithmen zielt der schottische Mathematiker John Napier[6] (1550–1617) auf die Vereinfachung des Zahlenrechnens ab [65, 66]. Im Vorwort seiner Logarithmentafel *Descriptio* von1614 [52] schreibt er über den gegenwärtigen Zustand und seine Absicht

> „Da nichts, meine hochverehrten Studenten der Mathematik, in der praktischen Mathematik so beschwerlich ist und den Rechner mehr aufhält und hemmt als Multiplikationen und Divisionen grosser Zahlen sowie Quadrat- und Kubikwurzelziehen aus ihnen, gegen die man wegen ihrer Umständlichkeit eine starke Abneigung hat und bei denen sich sehr leicht Rechenfehler einschleichen, so begann ich zu überlegen, durch welchen zuverlässigen Kunstgriff man diesen Hindernissen umgehen könne. Nachdem ich hierüber verschiedentlich hin- und hergedacht, habe ich endlich einige besonders einfache Abkürzungen gefunden, über die ich (vielleicht) später berichten werde. Aber unter all diesen ist keine nützlicher als diejenige, welche zugleich mit Multiplikationen und Divisionen und den so lästigen und umständlichen Wurzelziehungen von den zu multiplizierenden, zu dividierenden oder in Wurzel aufzulösenden Zahlen selbst Abstand nimmt und andere Zahlen einführt, die allein durch Addition, Subtraktion und Zwei- bzw. Dreiteilung die Stelle der Ersteren vertreten.“[7]

Man kann sich heute kaum noch die Mühen des Rechnens mit Zahlen ohne Computer, Tisch- oder Taschenrechner vorstellen.

Napier bleibt zunächst bei den Zuordnungen zwischen arithmetischer und geometrischer Folge und beschreibt die Eigenschaften der Logarithmen mit Hilfe von Proportionen. Hierbei sind die Zahlen in der arithmetischen Folge die Logarithmen der zugeordneten Grössen in der geometrischen Folge. Er zeigt u. a.

---

[6] Er selbst schrieb seinen Namen Jhone Neper, Jhone Nepair, John Napeir, Jo. Nepar, Joannes Neperus, Joannes Naperus, John Nepair. Weitere andere Schreibweisen findet man ebenfalls. Gesichert ist nur die latinisierte Form Ioannes Neper(us). Die neuere Literatur zitiert ihn mit Napier oder Neper.

[7] Zitiert nach Eriksson, K., Estep, D., Johnson, C.: Angewandte Mathematik: Body and Soul. Band 2, 2005. Englische Übersetzung bei Bruce [52, Preface].

dass die Logarithmen proportionaler Grössen gleiche Differenzen besitzen, d. h. dass für zwei Punktepaare x_1, x_2 und x_3, x_4 die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4} \text{ gilt wenn auch } \quad log\, x_1 - log\, x_2 = log\, x_3 - log\, x_4 \text{ zutrifft.} \quad (1)$$

Anders formuliert, Logarithmen proportionaler Zahlen oder Grössen sind äquidifferent [52, Prop. 1.]. Mit den Worten von Henry Briggs, der nur wenige Jahre später zusammen mit Napier eine verbesserte Logarithmentafel konzipiert, lautet dieser fundamentale Satz des Rechnens mit Logarithmen:

> „Logarithmen sind Zahlen, die, Proportionalen zugeordnet, gleiche Differenzen liefern“ und
>
> „Somit können... äquidifferente Begleiter von Proportionalen Logarithmen genannt werden.“[8]

Um Verwechslungen zu vermeiden ist es vorteilhaft, bei dieser Definition der Logarithmen von historischen Logarithmen zu sprechen im Gegensatz zu den modernen Logarithmen mit ihrer Definition über Basiszahl und Exponent.
Die Definitionen von Napier und Briggs gehen über Stifels Auffassung hinaus, sie verallgemeinern die Zuordnung zwischen einer geometrischen und einer arithmetischen Folge. Der Fall $b^0=1$ bzw $log 1=0$ ist darin nur ein Spezialfall, der einige Jahre später notgedrungen wieder aufgegriffen wird.
Manche Herausgeber von Tafelwerken erläutern die Charakteristik historischer Logarithmen an Hand von Gegenüberstellungen zweier Folgen. Die Darstellung[9] links aus dem Jahr 1658 zeigt in der linken Spalte die geometrische Folge der Numeri, daneben in vier Spalten A, B, C und D beliebig gewählte arithmetische Folgen als die zu ihnen gehörige Logarithmen.

Prop. Numb.	Logarithm. A	Logarithm. B	Logarithm. C	Logarithm. D
1	0	1	5	35
2	1	3	8	31
4	2	5	11	27
8	3	7	14	23
16	4	9	17	19
32	5	11	20	15
64	6	13	23	11
128	7	15	26	7

Gezeigt werden kann damit die Beziehung (1) mit den Proportionalen $\frac{16}{4}=\frac{128}{32}$. Sie entsprechen der Differenz 2 der Logarithmen in Spalte A, 4 in Spalte B, 6 in Spalte C und –8 in Spalte D. Ebenso wird deutlich, welchen Einfluss die Wahl der Relativposition beider Folgen zueinander auf das Arbeiten mit Logarithmen hat. Die geometrische Folge besitzt den Quotienten 2 zweier benachbarter Zahlen. Nur in Spalte A gilt $2^0 = 1$ und nur hier darf gerechnet werden $log(a \times c)=log(a)+log(c)$, während in den anderen Spalten gerechnet werden muss

---

8 Aus Briggs: *Arithmetica Logatithmica*, London 1624, Kapitel 1. Die Übersetzung ist zitiert nach Lüneburg [46]. Begleiter bedeutet, dass einer Zahl eine andere zugeordnet ist – eine einfache Formulierung für Funktion zweier Grössen.

9 Aus John Newton: *Trigonometria Britanica*, London 1658, Lib. 1, Chap. 3 entnommen. Eine ganz ähnliche Zusammenstellung gibt Briggs in der *Arithmetica Logarithmica*, London 1624, Kap. 1.

$log(a \times c) = log(a) + log(c) - log(1)$. Auf diese Besonderheit aus der Anfangszeit der Logarithmen wird weiter unten nochmals eingegangen.

Die Auffassung von Logarithmen, abgeleitet aus den Zuordnungen zwischen den Gliedern einer arithmetischen und einer geometrischen Folge, besteht bis weit in das 18. Jahrhundert hinein. Die Encyclopaedia Britannica erklärt noch 1797

> „Logarithms... a series of numbers in arithmetical progression, corresponding to others in geometrical progression; by means of which, arithmetical calculations can be made with much more ease and expedition than otherwise."

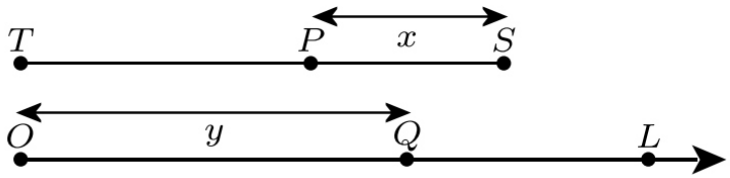
Sinngemäss, aber einschränkend, äussert sich Zedler in *Grosses Vollständiges Universallexikon aller Wissenschafften und Künste* (1731–1754) unter dem Begriff „Logarithmische Rechnung":

> „Logarithmus ist in der Trigonometrie eine Zahl aus einer Arithmetischen Progression, die sich von 0 anfängt und deren Glieder sich auf eine Geometrische Progression beziehen, wovon das erste Glied 1. ist."[10]

Die heute geläufige Definition des Logarithmus einer Zahl z als jener Zahl p, mit der man die Basis b potenzieren muss um z zu erhalten, also $z = e^p$ und $p = log_e z$, wird für die Basis e erstmals von Leonhard Euler 1728 in einer nicht publizierten Schrift verwendet. Er wiederholt sie in *Vollständige Anleitung zur Algebra* von 1770. Soweit bekannt ist die erste Logarithmentafel, die die neue Definition im Vorwort bringt, Gardiner *Tables of Logarithms,* London 1742. Der Text ist vom Mathematiker William Jones (1675–1749) übernommen. Dort steht auf S. 1 zu lesen:

> „The common Logarithm of a number is the Index of that power of 10, which is equal to the number: That is, The Logarithm of any number $a = \overline{10}|^{+x}$, or $a = \overline{10}|^{-x}$, is +x, or –x.
> Hence in the decimal series of numbers the logarithms of the numbers $\overline{10}|^{3}$, $\overline{10}|^{2}$, $\overline{10}|^{1}$, $\overline{10}|^{0}$ (or 1), $\overline{10}|^{-1}$, $\overline{10}|^{-2}$, $\overline{10}|^{-3}$ are +3, +2, +1, 0, –1, –2, –3."

Zurück zu Napier.
Nach jahrelanger Arbeit – man spricht von 20 Jahren Rechenarbeit – gelingt es ihm, eine Logarithmentafel zu erstellen, die die Unzulänglichkeit der Tabelle des Typs wie bei Stifel beseitigt. Seine Idee beinhaltet ein kinematisches Modell der Logarithmen, die darin über den Begriff der Geschwindigkeit als Funktion ihrer Numeri definiert sind. Das Modell beschreibt er wie folgt:



[10] Mit den Anfangswerten 0 und 1 meint Zedler die Voraussetzung $b^0 = 1$. Zuweilen nennen die Autoren eine Folge von Zahlen auch Progression.

Auf einer Strecke TS startet zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Punkt P bei T. Seine Geschwindigkeit ist stets gleich dem Abstand PS, für $t = 0$ somit gleich TS. Er wird also mit zunehmender Zeit immer langsamer.
Zum gleichen Zeitpunkt startet auf einer nach rechts offenen Linie ein Punkt Q bei O mit der Anfangsgeschwindigkeit von P. Dessen Geschwindigkeit bleibt konstant. Napier setzt $TS = 10^7$ und bezeichnet $y = OQ$ als den Logarithmus von $x = PS$.

Mit seinen eigenen Worten liest sich das so:

> (26) „The number given to the logarithm of the sine is produced by a point always moving with some given velocity, the same amount the total sine had when it began to decrease geometrically, until it has decreased to the size of the sine given, in the same time.“[11]

Woher die Konstante 10^7, sie entspricht sin 90° und wird *sinus totus* genannt, kommt wird weiter unten erklärt. Das Verständnis für Napiers logarithmische Funktion gestaltet sich leichter, wenn sein kinematisches Modell in eine moderne Notation übergeführt wird.
Wir schreiben für die Bewegung des Punktes P

$$\frac{d}{dt}(10^7 - x) = x \text{ , mit } x(0) = TS = 10^7 \text{ folgt } x(t) = 10^7 \times e^{-t}$$

und für Q

$$\frac{dy}{dt} = TS = 10^7 \text{ , mit } y(0) = 0 \text{ folgt } y(t) = 10^7 \times t \text{ ,}$$

nach Elimination von t ergibt sich

$$y = logNep(x) = 10^7 \times \ln\left(\frac{10^7}{x}\right) . \qquad (2)$$

Napier berechnet die Logarithmen für die Werte der Winkelfunktion sinus. Die Variable x entspricht daher dem in der Tafel angegebenen sinus-Wert. Als Definition des Napierschen Logarithmus zur Basis e ist diese Bewegungsgleichung nicht geeignet, weil im Argument des natürlichen Logarithmus eine weitere Funktion auftritt.
Napiers funktionaler Ansatz mit den Bewegungen zweier Punkte geht weit über Stifels Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen hinaus.[12] Allerdings steht ihm nicht das Werkzeug der Infinitesimalrechnung zur Verfügung, sodass er mit kleinen diskreten Zeitabschnitten arbeiten muss.

In der Vergangenheit hat man immer wieder die Frage gestellt, welche Basis b den Logarithmen von Napier zu Grunde liegt. Eine Antwort darauf lässt sich

---

[11] Aus Napiers *Constructio*, zitiert nach Bruce [52].

[12] Carlslaw [72] sieht drei Phasen in der Entwicklung von Napiers Idee zu Logarithmen: erstens die Zuordnung zwischen den beiden Zahlenfolgen, zweitens die kinematische Definition und schliesslich drittens seine gegenüber Briggs vorgeschlagene Verbesserung. Sie wird weiter unten beschrieben.

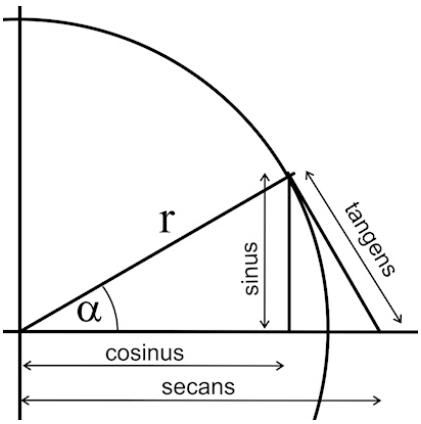
ohne zusätzliche Annahmen nicht geben, weil Napier nicht mit dem Begriff der Basis arbeitet und zudem bei ihm die Bedingung $logNep\ 1 = 0$ nicht erfüllt ist, er setzt vielmehr $logNep\ 10^7 = 0$. Nach einer Umformung der Bewegungsgleichung (2) von oben in

$$\frac{logNep\, x}{10^7} = \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right) \tag{3}$$

zeigt sich, dass Napier nach Division der Numeri und ihrer Logarithmen durch 10^7 die Logarithmen sehr nahe zur Basis $1/e$ gibt.[13] Auf die Problematik der Rückrechnung einer Basiszahl in historischen Logarithmensystemen wird später nochmals eingegangen.

Die obige Ableitung der Basis $1/e$ stellt auch klar, dass die später verwendete Bezeichnung *Napiersche Logarithmen* für solche zur Basis e, den sogenannten natürlichen oder hyperbolischen, keine Grundlage hat. Cajori [13] gibt einen guten Überblick über die Historie dieser Verwechslung. Einer der ersten, wenn nicht der erste überhaupt, der diesem Irrtum unterliegt ist Edmond Halley 1695. Er meint, man erhalte Briggs' Logarithmen, indem man die von Napier durch $ln\ 10 = 2{,}3025...$ dividiert [32]. Möglicherweise verwechselt er Napiers Logarithmen mit denen von Speidell, von dem noch die Rede sein wird.

Da Napier eine Tafel der Winkelfunktionswerte und ihrer Logarithmen für den Gebrauch in der Trigonometrie[14] erstellen will, weil er dort deren Anwendung sieht, arbeitet er mit dem Logarithmus des sinus und verwendet, den vorhandenen Sinustafeln entsprechend, den Wert 10^7 als Konstante.



Die Verwendung der Konstaten 10^7 und die Wahl $logNep\ 10^7 = 0$ bedarf einer Erklärung. Zu Napiers Zeiten betrachtete man eine Winkelfunktion nicht als das Verhältnis zweier Dreiecksseiten, sondern als die Länge einer Seite. Während das Verhältnis vom Kreisradius r unabhängig ist, gilt dies für die Länge einer Seite nicht. Um Dezimalbrüche bei der Angabe der Längen zu vermeiden hat man den Radius des Kreises so gross gewählt, dass das Abtrennen des dezimalen Teils die angestrebte Genauigkeit nicht beeinträchtigt. Als Grösse von r hat man Potenzen von 10 genommen, damit die Folge der Ziffern in den Funktionswerten gleich bleibt. Die Tafeln der Winkelfunktionen geben demnach nicht $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ usw., sondern $r \times \sin \alpha$. Die Grösse von r wird bis in

[13] Einen weiteren Nachweis der angenäherten Basis $1/e$ gibt Krauss [75]. Er geht von den ersten Elementen der Zahlenfolgen in Napiers erster Tafel aus.

[14] Zur engen Beziehung zwischen Logarithmen und Trigonometrie sei auf Braunmühl [6] verwiesen. Napiers Beiträge zur sphärischen Trigonometrie legt Dietrich [16] dar.

das 19. Jahrhundert hinein als Tafelparameter auf der ersten Seite angegeben. Die Wahl von Zehnerpotenzen für den Kreisradius erschwert die Aufstellung eines allgemeingültigen Zusammenhangs zwischen Numerus und Logarithmus, weil er davon abhängt, ob der Winkelfunktionswert als absolute Grösse oder als Verhältnis gesehen wird.

Aus dem funktionalen Ansatz Napiers und dem vorgesehenen Verwendungszweck ergeben sich besondere Eigenschaften seiner Logarithmen. Da er die Funktionswerte des sinus multipliziert mit dem Radius 10^7 als Numeri verwendet, erstrecken sich diese nur über den Bereich $10^7 \times [0...1]$, während *logNep* dazu die Werte ∞ bis 0 annimmt, also mit steigenden Numeri fällt, aber in diesem Bereich immer positiv bleibt. Erst für Werte ausserhalb dieses Bereichs, das ist $x > 1$ bzw. $x > 10^7$ wird *logNep* negativ.
Seiner Wahl liegt folgende Idee zu Grunde. Wenn in einer trigonometrischen Rechnung der *sinus totus* vorkommt wird dessen Logarithmus addiert oder subtrahiert und mit der Festsetzung $logNep\ 10^7 = 0$ kann dieser zusätzliche Summand dann entfallen. Ist beispielsweise in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse c und ein anliegender Winkel α gegeben, so errechnet sich die gegenüberliegende Kathete a zu

$$a = \frac{c \times \sin\alpha}{sintot}\ , \qquad \text{in Logarithmen:}$$

$$logNep\ a = logNep\ c + logNep\ (\sin\alpha) - (logNep\ sintot = 0)$$

Napiers Logarithmensystem lehnt sich an die prosthaphäretische Methode an und ist daher gut für Proportionsrechnungen in der ebenen und sphärischen Trigonometrie geeignet. Für Berechnungen mit Logarithmen für Numeri ausserhalb der Wertebereichs des Sinus erweist sich diese Anpassung des Systems als nachteilig. Diese Feststellung soll nicht die Leistung Napiers schmälern, sie soll vielmehr auf spätere Entwicklungsrichtungen hinweisen. Napier zeigt daher, wie man auch mit Zahlen ausserhalb des Wertebereichs des Sinus rechnen kann. Interpolationen sind ebenfalls umständlich auszuführen, weil in der Tafel die Winkel mit konstanter Differenz aufgeführt sind, nicht aber die zugehörigen Sinuswerte.
Multiplikationen und Divisionen, die nicht aus einer Proportion abgeleitet sind, können ebenfalls wie beabsichtigt auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden, jedoch nicht in der einfachen Form $log\ (a \times b) = log\ a + log\ b$ wie wir sie gewohnt sind sondern mit einem zusätzlichen konstanen Summanden. Will man nämlich mit historischen Logarithmen nach der Definition über Proportionen rechnen darf für Umformungen auch nur diese Definition herangezogen werden.
Für die Division $d = \frac{a}{c}$ ergibt sich aus der Definition $\frac{d}{1} = \frac{a}{c}$ und damit

$$logNep\ (a/c) = logNep\ a - logNep\ c + logNep\ 1.$$

Für ein Produkt $p = a \times c$ erhalten wir über $\frac{p}{a} = \frac{c}{1}$

$$logNep\ (a \times c) = logNep\ a + logNep\ \mathrm{c} - logNep\ 1.$$

Der Summand $\pm\ log\ 1$ spielt eine wesentliche Rolle in der frühen Geschichte der Logarithmen.
Die Logarithmen besonderer Numeri lauten bei Napier

$$logNep\ 10^7 = 0$$
$$logNep\ 10 = 10^7 \times 13{,}815505404$$
$$logNep\ 1 = 10^7 \times 16{,}118089638\ (^{15}$$

Für Rechnungen mit Potenzen von 10 sind seine Logarithmen gleichermassen unhandlich, denn es gilt

$$logNep\left(10^n \times c\right) = logNep\, c + n \times \left(logNep\, 10 - logNep\, 1\right)$$

mit den konstantenWerten von oben. Matzka [50] nennt *logNep* 1 einen „lästigen Begleiter“. Hier liegt der Grund für die Entscheidung von Napier und Briggs, den Ansatz $log\ 1 = 0$ zu wählen. Im Anhang 3.2 werden Rechenbeispiele in Napiers Logarithmensystem gegeben.

Seine Logarithmentafel veröffentlicht Napier im Jahr 1614 unter dem Titel *Mirifici canon logarithmorum descriptio* (Beschreibung der wunderbaren Aufstellung der Logarithmen). Sie enthält die Winkelfunktionen und deren Logarithmen nach dem Napierschen System für einen Radius von 10^7 und in Schritten von ganzen Minuten. Anleitungen zum Gebrauch der Tafel sind ebenfalls enthalten. Bild 1 zeigt die Tabelle für 30° und 59°. Sie ist komplementär angeordnet, d. h. Funktionswerte für den Bereich 0° bis 44° werden links oben beginnend, die von 45° bis 90° von rechts unten beginnend gelesen.

Bezogen auf die Winkelangaben in Grad links oben plus den in der linken Spalte gegebenen Minuten bedeuten die Spaltenüberschriften

α	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	90–α
	$10^7 \times \sin(\alpha)$	*logNep* sin(α)	*logNep* sin(α) –*logNep* cos(α) = *logNep* tan(α)	*logNep* cos(α)	$10^7 \times \cos(\alpha)$	

[15] Aus *Constructio* [52] Abschn. 53.

Gr. 30

30 min	Sinus	Logarithmi	Differentia	+ | −	Logarithmi	Sinus	
0	5000000	6931469	5493059	1438410	8660254		60
1	5002519	6926432	5486342	1440090	8658799		59
2	5005038	6921399	5479628	1441771	8657344		58
3	5007556	6916369	5472916	1443453	8655888		57
4	5010074	6911342	5466206	1445136	8654431		56
5	5012591	6906319	5459498	1446821	8652973		55
6	5015108	6901299	5452792	1448507	8651514		54
7	5017624	6896282	5446088	1450194	8650055		53
8	5020140	6891269	5439387	1451882	8648595		52
9	5022656	6886259	5432688	1453571	8647134		51
10	5025171	6881253	5425992	1455261	8645673		50
11	5027686	6876250	5419298	1456952	8644211		49
12	5030200	6871250	5412605	1458645	8642748		48
13	5032714	6866254	5405915	1460339	8641284		47
14	5035227	6861261	5399227	1462034	8639820		46
15	5037740	6856271	5392541	1463730	8638355		45
16	5040253	6851285	5385858	1465427	8636889		44
17	5042765	6846302	5379177	1467125	8635423		43
18	5045277	6841323	5372499	1468824	8633956		42
19	5047788	6836347	5365822	1470525	8632488		41
20	5050299	6831374	5359147	1472227	8631019		40
21	5052809	6826405	5352475	1473930	8629549		39
22	5055319	6821439	5345805	1475634	8628079		38
23	5057829	6816476	5339137	1477339	8626608		37
24	5060338	6811516	5332471	1479045	8625137		36
25	5062847	6806560	5325808	1480752	8623665		35
26	5065355	6801607	5319147	1482460	8622192		34
27	5067863	6796657	5312488	1484169	8620718		33
28	5070370	6791710	5305831	1485879	8619243		32
29	5072877	6786767	5299177	1487590	8617768		31
30	5075384	6781827	5292525	1489302	8616292		30

59

Bild 1: Napiers *Descriptio,* die Tabelle für 30°

Mit den Winkelangaben rechts und unten gilt diese Zuordnung am unteren Tabellenrand von rechts nach links gelesen.[16]
Ein Rechen- und Ablesebeispiel: an Hand der obigen Formel (2) ergibt sich für sin 30° = 0,5 bzw. = 5000000 / r mit $r = 10^7$

$$logNep(\sin 30°) = 10^7 \times \ln\left(\frac{10^7}{5 \times 10^6}\right) = 10^7 \times \ln 2 = 6931471{,}8$$

Napier gibt in seiner Tafel *logNep* sin30° = 6931469 (Bild 1, erste Zeile, zweite Spalte). Wie Fischer [22] zeigt liegt der Grund für die Differenz zum richtigen Wert in Napiers Rechenfehlern im iterativen Rechenverfahren einschliesslich dem Abschneiden dezimaler Bruchteile.
Für Winkel < 45° ist *logNep* tan positiv, bei 45° = 0 und darüber negativ.

[16] Gestützt auf die Beziehungen (1) und (2) könnte man die Zahlen in Napiers Tafel auch als Logarithmen zur Basis e der Winkelfunktionswerte secans, cosecans und cotangens interpretieren. Eine solche Sicht hat Napier jedoch nie beabsichtigt.
Ursprünglich hatte Napier andere ausführlichere Spaltenüberschriften vorgesehen, zumindest für eine mit der Hand gefertigte Tafel, vgl. Anh. 2.

Deg	*logNep* (tan Deg)
44°57'	17455
45°	0
45°03'	–17455

Die Tafel verwendet die mittlere Spalte zweimal, ein Minuszeichen wird nicht gegeben. Auf den Wechsel des Vorzeichens weisen die Zeichen + | – oberhalb der Spalte hin.

Erst 1619, nach Napiers Tod, erscheint das Werk *Mirifici canon logarithmorum constructio,* herausgegeben von seinem Sohn Robert Napier mit Erläuterungen zu den Berechnungen [10]. Er hatte den Text schon vorher geschrieben aber nicht veröffentlicht.

Napier nennt die Numeri „natürliche Zahlen“ (lat. *numeri naturales)* und die Logarithmen „künstliche Zahlen“ (lat. *numeri artificiales)*. Eine Logarithmentafel nennt er entsprechend die „künstliche Tafel“ (lat. *tabula artificialis*). Die Verwendung des Gegensatzes natürlich – künstlich lässt erkennen, dass er die Logarithmen nur als Hilfskonstrukte, als Stellvertreterzahlen, betrachtet. Sehr schön ist auch die Definition von John Newton 1658

> „Logarithmes are borrowed numbers, which being adjoyned to numbers continually proportionally, have equal differences among themselves.“[17]

Logarithmen werden als künstliche, als geborgte, entlehnte Zahlen angesehen. Später formt Napier den Begriff Logarithmus als Zusammensetzung aus den griechischen Wörtern *logos* (Wort, Vernunft, Rechnung) und *arithmos* (Zahl).[18] Da *logos* viele Bedeutungen umfasst ist die Interpretation dessen, was Napier gemeint hat, nicht einfach, zumal er sich dazu nicht äussert. Manche Autoren interpretieren den Begriff Logarithmus als Verhältniszahl bzw. Proportionalzahl, als „Zahl zu den Verhältnissen (gehörig)“ [72]. Möglich auch, dass mit *logos* nur das Rechnen, demnach eine Zahl zum Rechnen gemeint ist. Napier lässt uns im Unklaren. Auf die Definition des Begriffs Logarithmen wird weiter unten nochmals eingegangen.

Mit seiner Logarithmentafel hat Napier eine Lawine von Änderungen und Verbesserungen in Gang gesetzt. Die Napierschen Logarithmen erlangten trotz einiger Unzulänglichkeiten in der Anwendung aufgrund ihres Potenzials in kurzer Zeit Bekanntheit und Verbreitung. In fast jeder Fachpublikation zum Thema wird ein Zitat eingefügt, das deshalb konsequent auch hier nicht fehlen soll. So bemerkt der Astronom und Mathematiker Pierre-Simon Laplace (1749–1827):

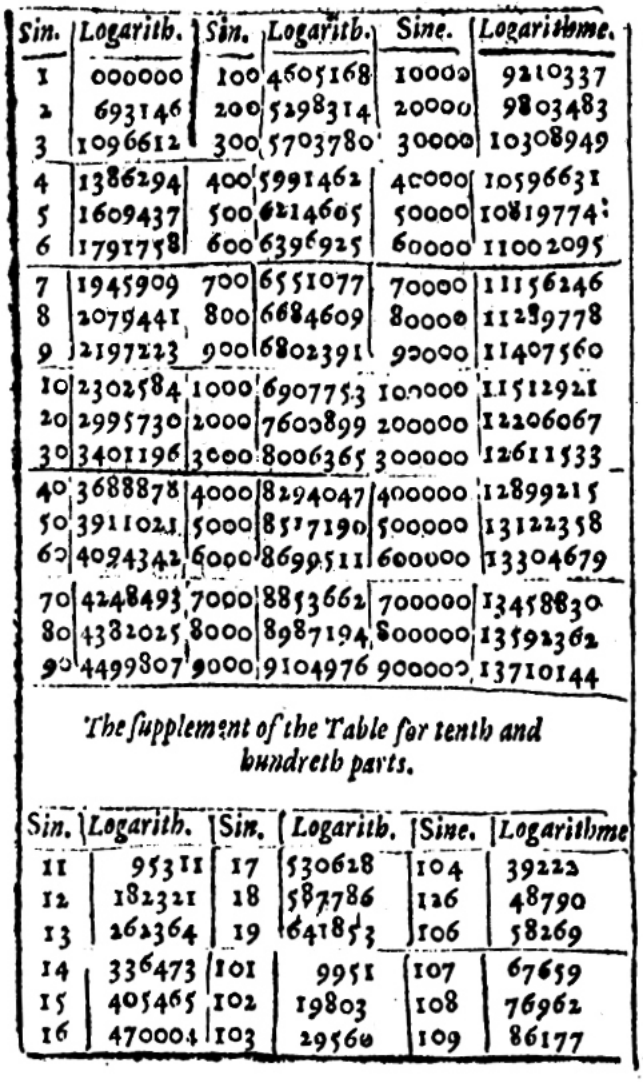
> „Durch die Arbeitserleichterung infolge der Verwendung von Logarithmen wird das Leben der Astronomen verdoppelt“.

---

[17] Zitiert aus John Newton: *Trigonometria Britanica*(!), London 1658, Lib. 1, Chap. 3

[18] Wahrscheinlich hat Napier den Begriff von *logarithmanteia* (Wahrsagung von Wort zu Zahl und umgekehrt) aus Caspar Peucer: *Commentarius... 1553 Wittenberg* übernommen [73].

Der Mathematiker und Kartograph Edward Wright (1561–1615) übersetzt Napiers Schrift aus dem Lateinischen ins Englische und veröffentlicht sie unter dem Titel *A description of the admirable table of logarithmes ... Invented and published in Latin by ... John Nepair...,* London 1616. Das Werk ist auch eine Abkehr von der Gelehrtensprache Latein hin zur Landessprache. Abgesehen von Änderungen in der Stellenzahl ist diese Tafel identisch mit der *Descriptio* von Napier.
Einigen Exemplaren der zweiten Ausgabe von 1618 ist ein Kapitel beigebunden mit dem Titel *An Appendix to the Logarithmes, shewing the practise of the Calculation of Triangles and also a new and ready way for the exact finding out of such lines and Logarithmes as are not precisely to be found in the Canons.*



Sin.	Logarith.	Sin.	Logarith.	Sine.	Logarithme.
1	000000	100	4605168	10000	9210337
2	693146	200	5298314	20000	9803483
3	1096612	300	5703780	30000	10308949
4	1386294	400	5991462	40000	10596631
5	1609437	500	6214605	50000	10819774
6	1791758	600	6396925	60000	11002095
7	1945909	700	6551077	70000	11156246
8	2079441	800	6684609	80000	11289778
9	2197223	900	6802391	90000	11407560
10	2302584	1000	6907753	100000	11512921
20	2995730	2000	7600899	200000	12206067
30	3401196	3000	8006365	300000	12611533
40	3688878	4000	8294047	400000	12899215
50	3911021	5000	8517190	500000	13122358
60	4094342	6000	8699511	600000	13304679
70	4248493	7000	8853662	700000	13458830
80	4382025	8000	8987194	800000	13592362
90	4499807	9000	9104976	900000	13710144

The supplement of the Table for tenth and hundreth parts.

Sin.	Logarith.	Sin.	Logarith.	Sine.	Logarithme
11	95311	17	530628	104	39222
12	182321	18	587786	126	48790
13	262364	19	641853	106	58269
14	336473	101	9951	107	67659
15	405465	102	19803	108	76962
16	470004	103	29560	109	86177

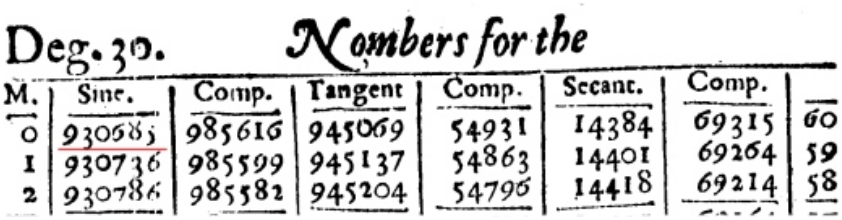
Bild 2: die Tafel aus dem Anhang bei Wright: *Description..*, 1618

Dazu gehört eine Hilfstafel, die in Bild 2 wiedergegeben ist. Der Autor des Anhangs wird nicht genannt, der Mathematiker und Astronom J. W. L. Glaisher (1848–1928) vermutet William Oughtred als Urheber [76].

Wie schon der Titel ausweist ist mit *a new and ready way* ein Verfahren des Interpolierens zwischen Tafelwerten gemeint. In ihrem oberen Teil führt die genannte Hilfstafel Numeri in Einer-, Zehner-, Hunderter bis Hunderttausenderschritten sowie weiter unten als Dezimalbrüche 1,1 bis 1,9 und 1,01 bis 1,09, letztere ohne Dezimaltrennzeichen, auf. Die Logarithmen dazu sind zur Basis *e,* multipliziert mit 10^6 und ebenfalls ohne Dezimaltrennzeichen angegeben. So gilt beispielsweise
ln 900000 = 13,710150 und ln 1,1 = 0,095310 sowie ln 1 = 0. Die beiden letzten Stellen sind nicht in allen Werten richtig angegeben. Wie der Autor seine Tafel berechnet hat ist ebenfalls nicht beschrieben.

Die Hilfstafel gilt als die erste publizierte Tafel natürlicher Logarithmen zur Basis *e*. Man darf ihr allerdings keine zu grosse historische Bedeutung beimessen, denn sie ist mit ihrer grossen Stufung als Hilfstafel für die Interpolation und nicht als eigenständige Zahlentafel gedacht.

Drei Jahre nach Napier *Descriptio* erscheinen die *New Logarithmes, the first invention whereof, was, by the Honourable Lo: Iohn Nepair... These being extracted from and out of them (they beeing first overseene, corrected, and amended)...* London 1619 u. ö. von John Speidell[19]. Er nennt seine Tafel „Neue Logarithmen“ weil er Änderungen und Ergänzungen an Napiers Logarithmen vornimmt. Abgesehen von der Erklärung im Titel gibt das Werk keinen weiteren Kommentar. Das Bild 3 zeigt einen Ausschnitt dieser Tafel. Ein Dezimaltrennzeichen ist nicht angegeben, man muss deshalb aus Speidells Absicht rekonstruieren, welche Zahl gemeint ist.



Deg. 30. Nombers for the

M.	Sine.	Comp.	Tangent	Comp.	Secant.	Comp.	
0	930685	985616	945069	54931	14384	69315	60
1	930736	985599	945137	54863	14401	69264	59
2	930786	985582	945204	54796	14418	69214	58

Bild 3: Speidell: *New Logarithmes,* Anfang der Tafel 1619 für 30°

Die logarithmisch-trigonometrische Tafel enthält Spalten für log Sine, log Tangent und log Secant. Für alle Winkelfunktionswerte ≤ 1 tabelliert er 10^8 – *logNep* unter Vernachlässigung der beiden letzten Stellen. Es gilt

[19] Titelseiten aus der Zeit sind sehr umfassend gehalten und geben oft in Kurzfassung den Inhalt und die Verwendung des Werkes. In der vorliegenden Ausgabe von 1622 schreibt Speidell im unteren Teil der Titelseite sogar wo er wohnt, damit zu ihm findet wer sein Werk kaufen will: *New Logarithmes... By John Speidell, professor of the Mathematickes, and are to bee solde at his dwelling house in the Fields, on the backe side of Drury Lane, between Princess streete and the new Playhouse.* Das kann niemand verfehlen.

$$logSpe\,x = 10^8 - logNep\,x = 10^7 \times \left(10 - \ln\left(\frac{10^7}{x}\right)\right) = 10^7 \times \left(10 + \ln\left(\frac{x}{10^7}\right)\right)$$

Ein Ablesebeispiel: mit dem Wert *logNep* sin 30° = $10^7 \times 0{,}6931469$ erhalten wir $10^8 - 10^7 \times 0{,}6931469 = 930685(31$.
Logarithmen der Winkelfunktionswerte grösser als 1 werden im System Napier angegeben, jedoch positiv notiert. Da der Wert *logSpe* (tan 45°) am Ende der Tafel steht ist er dort auch zweimal aufgeführt, nämlich in der Tafel für 44° und in der für 45°. Die Tabelle unten, eine gekürzte Abschrift dieser Stelle, zeigt wie Speidell die Notation wechselt.

Deg	***logSpe* (tan Deg)**	***logNep* (tan Deg)**
44°58'	999884	11637
44°59'	999942	5818
44°60'	1000000	0
45°	00	0
45°01'	58	–5818
45°02'	116	–11637

Er erreicht mit seinen Änderungen auf einfachem Weg, dass mit steigenden Werten der Winkelfunktionen auch deren Logarithmen zunehmen und diese zudem immer positiv sind. Nach wie vor gilt auch bei ihm *logSpe* 1 ≠ 0.

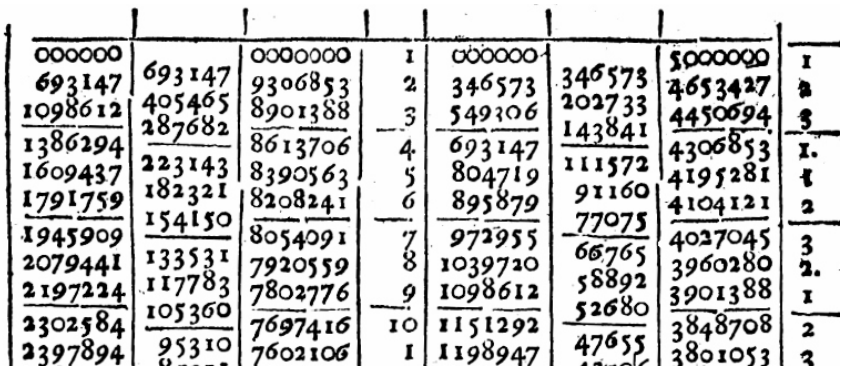


Bild 4: Speidell: *New Logarithmes,* die zweite Tafel in Ausgabe 1622

In den Ausgaben 1622 und 1628 fügt Speidell noch eine zweite Tafel mit den Logarithmen der Numeri *n* von 1 bis 1000 an (s. Bild 4). Sie enthält die Werte

$$logSpe\,x = logNep\,1 - logNep\,x = 10^6 \times ln\,x.$$

Damit stehen Logarithmen für Zahlen zur Verfügung, die im Wertebereich der Winkelfunktionen nicht enthalten sind. Zudem steigen die Logarithmen mit steigenden Numeri und es gilt zweckmässigerweise *logSpe* 1 = 0, jedoch wegen der Basiszahl *e* erschwerend *logSpe* $10^n = n \times logSpe\ 10 = n \times 2{,}302584$.

In den Ausgaben, die ich einsehen konnte, sind keine Spaltenüberschriften in dieser zweiten Tafel angegeben. Auf den rechten Seiten enthalten die Spalten folgende Werte:

$10^6\times$ *LgSpe*.Num	Differenz	$10^7 -$ *LgSpe*	**Numerus**	*LgSpe* / 2	Differenz	5×10^6 – *LgSpe* / 2	Umrechnung

Mit Ausnahme der Umrechnung sind die Spalten auf den linken Seite identisch angeordnet. Dividiert man die Logarithmuszahlen durch 10^6 handelt es sich um die zweite Tafel der natürlichen Logarithmen, obwohl Speidell weder diesen Begriff noch die Zahl *e* kennen konnte.[20] Glaisher [27] und Henderson [35] bezeichnen sie als hyperbolische[21] Logarithmen. Ob andere Ausgaben diese Tafel ebenfalls enthalten ist mir nicht bekannt.

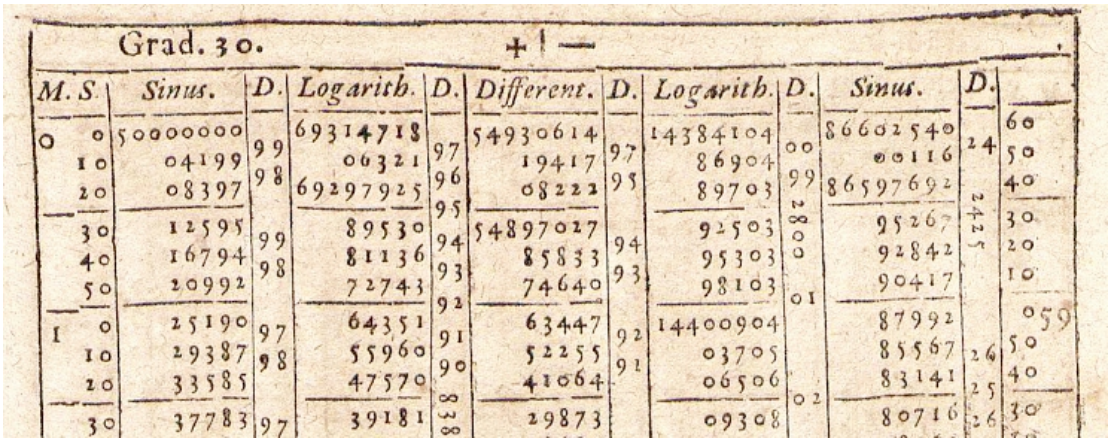
Bei Speidell treten die Logarithmen aus dem an der Trigonometrie orientierten Verwendungszweck heraus und werden universell verwendbar. Auffallend ist die Unbekümmertheit mit der Speidell die ihm zugänglichen Tafelwerte einfach abändert. Praktisch orientiert gibt er zudem in der rechten Spalte die Zahlenwerte der Längeneiheiten *feet*, *inches* und *quarter inches* wenn der Numerus als Anzahl von *quarter inches* angesehen wird [11]. Das Werk blieb dennoch weitgehend unbekannt [13, 39, 40]. Nachteilig mag sich ausgewirkt haben, dass es keinerlei Erklärung enthält. Ivory [40] druckt Speidells Tafel 1807 nochmals ab und fügt Spaltenüberschriften hinzu.
Das frühe Auftreten der Basis *e* in den Logarithmen ist von den Autoren keineswegs beabsichtigt. Es ergibt sich aus dem Ansatz, den Napier gewählt hat.

In Deutschland werden die Logarithmen bekannt gemacht durch den deutschen Mathematiker Benjamin Ursinus (1587–1633 od. 1634). Schon 1618 gibt er die *Trigonometria logarithmica Johannis Neperi* heraus. Das Werk enthält die Tafelwerte aus Napiers *Descriptio*, gekürzt um zwei Stellen. Im Jahr 1624 folgt der *Magnus canon triangulorum Logarithmicus*. Darin sind die Werte um eine Stelle mehr als bei Napier angegeben und die Stufung der Eingangswinkel von einem Grad auf zehn Sekunden verfeinert, was eigene Berechnungen voraussetzt. Dabei hat Ursinus auch Korrekturen vorgenommen wie der jetzt richtige Wert für *logNep sin*30° zeigt. Beide Werke sind in lateinischer Sprache abgefasst. Bild 5 stellt einen Ausschnitt der Tafel dar.

---

[20] Mit einem Komma als Dezimaltrennzeichen ist diese zweite Tafel bei Ivory [40] abgedruckt. Allerdings wird das Komma auch zur Gruppierung von jeweils drei Ziffern benutzt weshalb Missverständnisse auftreten können.

[21] Die Bezeichnung hyperbolische Logarithmen leitet sich von Eigenschaften einer gleichseitigen Hyperbel ab, die sich mit Logarithmen zur Basis *e* beschreiben lassen.



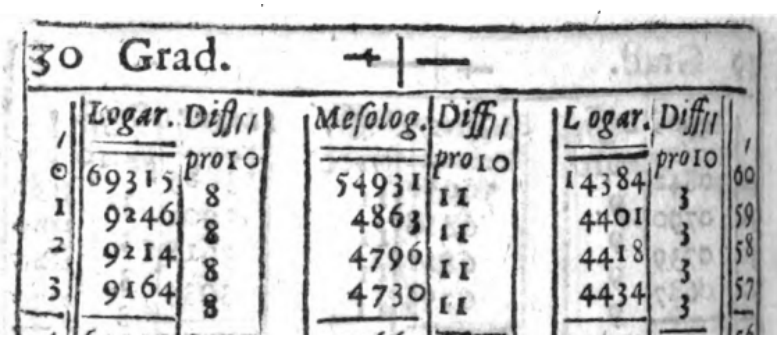
Grad. 30. + | —

M. S.	Sinus.	D.	Logarith.	D.	Different.	D.	Logarith.	D.	Sinus.	D.	
0 0	50000000	99	69314718	97	54930614	97	14384104	00	86602540	24	60
10	04199	98	06321	96	19417	95	86904	99	00116		50
20	08397		69297925	95	08222		89703	28	86597692	2425	40
30	12595	99	89530	94	54897027	94	92503	00	95267		30
40	16794	98	81136	93	85833	93	95303		92842		20
50	20992		72743	92	74640		98103	01	90417		10
1 0	25190	97	64351	91	63447	92	14400904		87992		059
10	29387	98	55960	90	52255	91	03705		85567	26	50
20	33585		47570	88	41064		06506	02	83141	25	40
30	37783	97	39181	38	29873		09308		80716	26	30

Bild 5: Ursinus: *Magnus Canon,* Ausschnitt 30°

Die umfassendste Tafel Napierscher Logarithmen, die in Deutschland erschien, war *Praxis trigonometriae logarithmicae cum logarithmorum tabulis* (Danzig 1634 u. ö.) des deutschen Astronomen und Mathematikers Petrus Crüger oder Peter Krüger (1580–1639). Er gibt eine Tafel mit Napiers Logarithmen für Winkelfunktionen (Bild 6) sowie für ganze Zahlen und fügt zwei weitere Hilfstafeln bei. Die Logarithmen der Winkelfunktionen sind mit $r = 10^5$ im Abstand von Minuten des Eingangs angegeben, die Zahlen der anderen Tafel erstrecken sich von 1 bis 9999. Die Logarithmen dieser Tafel errechnen sich analog zu Napier aus

$$logCru(x) = 10^5 \times \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^4}\right) .$$



30 Grad. + | —

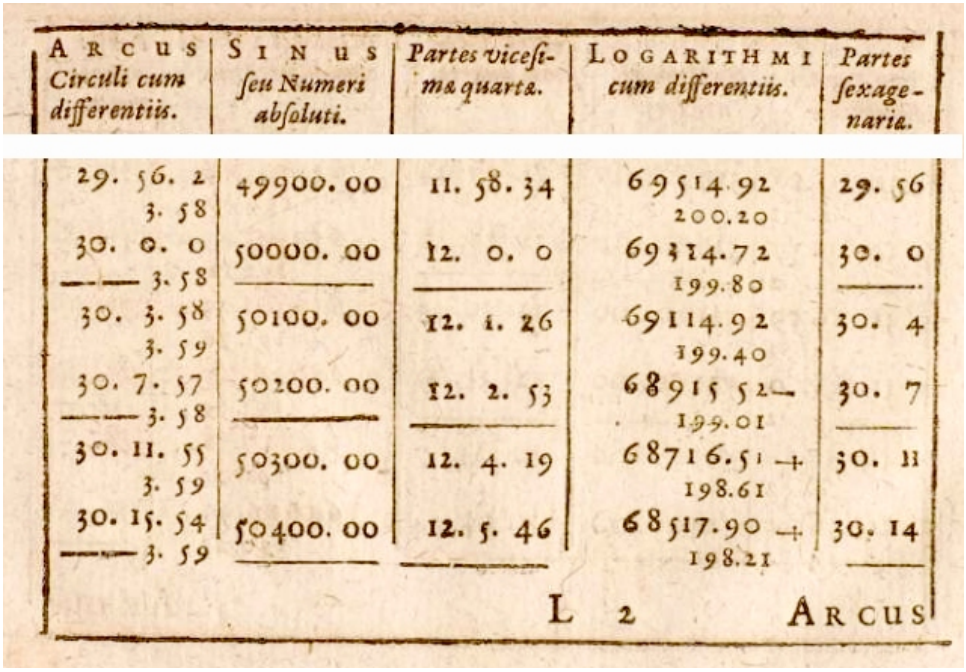
′	Logar.	Diff. pro 10	Mesolog.	Diff. pro 10	Logar.	Diff. pro 10	′
0	69315	8	54931	11	14384	3	60
1	9246	8	4863	11	4401	3	59
2	9214	8	4796	11	4418	3	58
3	9164	8	4730	11	4434	3	57

Bild 6: Crüger: *Praxis trigonometriae logarithmicae,* Ausschnitt 30°

Johannes Kepler

Eine längere Lebensdauer erhalten die Logarithmen des Systems Napier durch den Astronomen und Mathematiker Johannes Kepler (1571–1630). Er befasst sich mit Logarithmen während der Arbeit an dem grossen astronomischen Werk *Tabulae Rudolphinae,* die eine Sammlung von Tafeln und Regeln zur Vorhersage der Planetenstellungen beinhalten. Napier hatte zunächst nur seine Tafel und dann erst Jahre später eine Erklärung dazu veröffentlicht, weshalb seine Logarithmen ohne Nachweis ihrer theoretischen Grundlage argwöhnisch betrachtet wurden. In diesem Sinne äussert sich auch Keplers Lehrer Michael Maestlin.

Kepler, der sowohl die Logarithmen von Bürgi als auch die von Napier kennt, stellt die Theorie der Logarithmen auf eine selbst erarbeitete Grundlage. Seine Rechenmethoden ähneln denen Napiers, sind jedoch auf ganze Zahlen und nicht den Sinus ausgerichtet. Er berechnet die Logarithmen neu und veröffentlicht sie in seinem Werk *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos* (1624), gefolgt von der im Hauptwerk fehlenden Anweisung zum Gebrauch mit dem Titel *Supplementum chiliadis logarithmorum, continens praecepta de eorum usu* (1625). In der Tafel besteht eine der Änderungen darin, dass die Numeri gleichmässig gestuft sind, dafür die Winkel ungleiche Abstände besitzen (Bild 7, zweite Spalte von links).



ARCUS Circuli cum differentiis.	SINUS seu Numeri absoluti.	Partes vicesimæ quartæ.	LOGARITHMI cum differentiis.	Partes sexagenariæ.
29. 56. 2 3. 58	49900. 00	11. 58. 34	69514.92 200.20	29. 56
30. 0. 0 —— 3. 58	50000. 00	12. 0. 0	69314.72 199.80	30. 0
30. 3. 58 3. 59	50100. 00	12. 1. 26	69114.92 199.40	30. 4
30. 7. 57 —— 3. 58	50200. 00	12. 2. 53	68915.52 — 199.01	30. 7
30. 11. 55 3. 59	50300. 00	12. 4. 19	68716.51 + 198.61	30. 11
30. 15. 54 —— 3. 59	50400. 00	12. 5. 46	68517.90 + 198.21	30. 14

L 2 ARCUS

Bild 7: Kepler: *Chilias logarithmorum,* Ausschnitt 30°

Napier hatte seine Logarithmen aus einer geometrisch- kinematischen Betrachtung abgeleitet. Kepler hingegen verwendet eine arithmetische Sicht

und lässt Ansätze einer funktionalen Betrachtung erkennen. Er setzt zu jedem Verhältnis $\frac{a}{b}$ eine Masszahl[22] $M(\frac{a}{b})$. Mit einem Zwischenglied x, für das $a > x > b$ gesetzt wird, entstehen zwei neue Proportionen $\frac{a}{x}$ und $\frac{x}{b}$. Von deren Masszahlen wird verlangt, dass sie die Beziehung $M(\frac{a}{x})+M(\frac{x}{b})=M(\frac{a}{b})$ erfüllen, woraus auch $M(\frac{a}{a})=0$ folgt. Ausserdem sollen gleiche Masszahlen auch gleichen Proportionen entsprechen. Mit x als einer mittleren Proportionalen $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, $x=\sqrt{ab}$, würde gelten $M(\frac{a}{b})=2\times M(\frac{x}{b})$. Ebenso wie Napier geht auch Kepler bei der Masszahl von der Gegenüberstellung einer arithmetischen mit einer geometrischen Folge aus:

arith.	0	$M(\frac{a}{x_n})$	$2\times M(\frac{a}{x_n})$	$3\times M(\frac{a}{x_n})$	...
geom.	1	$\frac{a}{x_n}$	$\left(\frac{a}{x_n}\right)^2$	$\left(\frac{a}{x_n}\right)^3$	...

Zum Logarithmus *logKep* wird die Masszahl *M*, wenn eine Variable auf den *sinus totus,* d. h. *sin* 90° = 10^n bezogen wird. Kepler wählt 10^7 und setzt

$LogKep\ x=M(\frac{10^7}{x})$,erhält $LogKep\ x = 10^7\times\ln(\frac{10^7}{x})$ und befindet sich damit ganz in der Nähe von Napier. Der Begriff des Logarithmus als Verhältniszahl trifft bei Kepler in vollem Umfang zu.
Umfangreiche Erläuterungen zu Keplers Logarithmen geben u. a. Hammer [33] und Schoberleitner [57].

Späte Napier-Tafeln

Ab den dreissiger Jahren des 17. Jahrhunderts beginnt die Zeit der grossen dekadischen Tafeln, auf die ich weiter unten bei Briggs eingehe. Die Logarithmen Napiers und der anderen Bearbeiter verlieren allmählich an Bedeutung. Ganz verschwunden sind sie dennoch nicht. Nach Ursinus und Kepler werden sie wiederholt gedruckt aber nicht neu berechnet.

Der Spanier Juan Caramuel y Lobkowitz (1606–1682), katholischer Geistlicher, Philosoph, Astronom und Mathematiker, veröffentlicht 1670 ein zweibändiges Tafelwerk mit dem Titel *Mathesis biceps vetus et nova* [71]. Es enthält Logarith-

[22] Im lateinischen Originaltext steht der Begriff *mensura proportionis* (Mass, Grad des Verhältnisses). Da Kepler die Masszahl nur als Text schreibt wird hier zur besseren Lesbarkeit die symbolische Form *M*() verwendet.

mentafeln nach den Systemen Napier, Briggs, eine Tafel nach seinem eigenem System sowie eine gekürzte Tafel der Keplerschen Logarithmen. [23]

Als Kepler das dekadische Logarithmensystem kennenlernt, stellt er seine Rudolphinischen Tafeln nicht noch einmal um. Wegen der herausragenden Bedeutung dieses Werkes hatte das zur Folge, dass mit Rücksicht auf die Benutzung die *Tabulae manuales logarithmicae* von Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch, eine feiner gestufte Logarithmentafel Keplers und „ein von Fehlern strotzendes Tabellenwerk“ [33, S.467] im Jahr 1700 neu herausgegeben werden musste.

Johann Carl Schulze gibt in seinem Werk *Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln*, Berlin 1778 in Band 2 für den Winkelbereicht 0° bis 90° nicht nur Winkelfunktionswerte sondern unter den Überschriften *Log.hyp.Sin*, *Log.hyp.Tan* und *Log.hyp.Cos* auch Napiersche Logarithmen, die er Ursinus' *Trigonometria* 1625 entnimmt. Mit den gekürzten Spaltenüberschriften sind die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen gemeint, wie man die von Napier fälschlich auch genannt hat, und nicht die hyperbolischen Winkelfunktionen.
Ein Vergleich: für 30° geben

Schulze *Log.hyp.Sin* = 0,69314718
Ursinus *Sinus Logarith.* = 69314718.

Im Vorwort in Band 1 begründet Schulze seine Wahl:

> „Denn weil die hyp. Logarithmen der sinus &c. eben sowohl wie die hyp. Logarithmen der natürlichen Zahlen nicht bloß zur Abkürzung der Rechnung, sondern zur Bestimmung der Integralgrößen gebraucht werden, so werde ich ihren Gebrauch hier eben so, wie im ersten Bande, voraussetzen, und nur sagen, daß ich sie aus *Napiers canone mirifico,* welches *Ursinus* erweitert hat, genommen habe.“

Henry Briggs

Mit Napier beginnt gleichzeitig ein zweiter Weg der Neudefinition, der zu den modernen dekadischen Logarithmen führt.
Als Napier seine *Descriptio* veröffentlicht, arbeitet Henry Briggs (1561–1630) als Professor für Geometrie am Gresham College in London. Er ist von Napiers Logarithmentafel begeistert, erkennt ihren Nutzen, aber auch ihre aus der Spezialisierung resultierende Unzulänglichkeit.

Briggs besucht Napier in den Jahren 1615 und 1616, um über dessen Logarithmen zu sprechen. Im Vorwort an den Leser zu seiner *Arithmetica Logarithmica* bekennt Briggs, dass nachdem er von Napiers *Descriptio* Kenntnis erhalten hatte, er zunächst mit dem *sinus totus* $r = 10^{10}$ setzen wollte

$logBri\ 10^{10} = 0$ und $logBri\ (r/10 \equiv 10^9 \equiv \sin 5°44'21'') = 1 \times r$, woraus sich

[23] Vgl. Henderson [35, #12.0].

$$logBri\ (a\times 10^n) = logBri\ a + n\times(logBri\ 10 - logBri\ 1) = logBri\ a - n$$

ergibt.
Ein solches System ist besser als das ursprüngliche von Napier, weil der Summand *logBri* 1 jetzt den Wert einer ganzen Zahl besitzt. Weiterhin unterscheiden sich die Logarithmen von Numeri mit gleicher Ziffernfolge nur noch in einem Summanden von der Grösse einer ganzen Zahl.
Als Briggs seinen Vorschlag Napier vorgetragen hatte, soll dieser wiederum

$$log\ 1 = 0 \text{ und } log\ 10 = 1\times r\ .$$

eingewandt haben, woraus noch einfacher $log\ (a\times 10^n) = log\ a + n\times log\ 10$ folgt. Hier liegt auch die Unterscheidung zwischen Kennzahl und Mantisse begründet. Mit seinem Vorschlag wendet sich Napier von seinem ursprünglichen Logarithmensystem ab zugunsten eines dezimal basierten.
Die Vorschläge von Briggs und Napier ergeben folgende Logarithmen der Potenzen von 10:

	Briggs	Napier	
log 1 =	10 r	0	
log 10 =	9 r	1 r	
log 100 =	8 r	2 r	
…			
log 10^9 =	1 r	9 r	
log 10^{10} =	0	10 r	$10^{10} \equiv r$
log 10^{11} =	–1 r	11 r	
…			
log 10^{-1} =	11 r	–1 r	
log 10^{-2} =	12 r	–2 r	
…			
allgem. log 10^n =	$(10 - n)\times r$	$n\times r$	

Briggs hielt Napiers Vorschlag für besser und übernahm ihn, weil über die Vorteile seines Vorschlags hinaus die Logarithmen für Zahlen grösser 1 durchgehend positiv werden und der „lästige Begleiter“ *log* 1 in Berechnungen nicht mehr auftritt, man kann also ein Produkt $a\times c$ vereinfachen auf

$$logBri\ (a\times c) = logBri\ a + logBri\ \mathrm{c}\ .$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Rechnen mit Exponenten. Die spätere Definition der Logarithmen als Exponenten einer Basiszahl wird daher ohne Umstellungen möglich.
Der Wert für r in $log\ 10 = r$ ist gross gewählt, um möglichst viele Proportionalzahlen im Intervall 0 bis 1 für genaue Rechnungen zu erhalten und um Dezimalbrüche zu vermeiden. Die Grösse von r ist von sekundärer Bedeutung, Briggs verwendet später $r = 10^{15}$.

Mit der Übernahme von Napiers Vorschlag war Briggs' erste Idee keineswegs endgültig vom Tisch. Nach 55 Jahren taucht sie beim spanischen Mathematiker Caramuel nochmals auf. Ich komme weiter unten darauf zurück.

Napier hatte ein dekadisch gestuftes System auf der Basis $log\ 1 = 0$ bereits im Anhang zur *Constructio* angesprochen. Demnach sind die dekadischen oder sogenannten Briggsschen Logarithmen, wie sie heute zuweilen genannt werden, zwar von Briggs erstmals berechnet worden, ihre Grundlagen hingegen sind eine Idee Napiers. Der Bericht von Briggs über das Gespräch mit Napier wurde in der Vergangenheit kontrovers ausgelegt, wie die Widerlegung von Huttons Kommentar hierzu [39] durch Gibson [24] zeigt.

Es wird immer wieder behauptet, die Logarithmentafeln von Briggs enthalten moderne Logarithmen zur Basis 10. Abgesehen von einem konstanten Multiplikator $r = 10^{15}$ ist das auch richtig. Allerdings ist die Quelle eine andere, denn Briggs verwendet den Begriff der Basis nicht, er geht wie seine Vorgänger von der Gegenüberstellung zweier Zahlenfolgen aus. Seine Logarithmen sind ein Spezialfall der historischen Definition mit der Festsetzung $log\ 1 = 0$ und den in obiger Tabelle gezeigten Eigenschaften.

Briggs erstellt zunächst die Tafel *Logarithmorum chilias prima* (Der Logarithmen erstes Tausend), 1617 – ein heute seltenes Werk, das die erste gedruckte Logarithmentafel zur Basis 10 darstellt. Es enthält die Logarithmen der Zahlen 1 bis 1000 mit Kennziffer bzw. Charakteristik und 14 Nachkommastellen. Die Kennziffer ist mittels eines senkrechten Strichs abgetrennt (Bild 8).

2	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,61681
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,02650
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,32796
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,71974
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,39790
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,57959
11	10413,92685,15823	4	16434,52676,48619
12	10791,81246,04762	45	16532,12513,77534
13	11139,43352,30684	6	16627,57831,68157
14	11461,28035,67824	47	16720,97857,93572
15	11760,91259,05568	8	16812,41237,37559
16	12041,19982,65592	49	16901,96080,,02851
17	12304,48921,37827	50	16989,70004,33602
18	12552,72505,10331	51	17075,70176,09794
19	12787,53600,95283	2	17160,03343,63480
20	13010,29995,66398	53	17242,75869,60079
21	13222,19294,73392	4	17323,93759,82297
22	13424,22680,82221	55	17403,62689,49424
23	13617,27836,01759	6	17481,88027,00620
24	13802,11241,71161	57	17558,74855,67249
25	13979,40008,67204	8	17634,27993,56294
26	14149,73347,97082	59	17708,52011,64214
27	14313,63764,15899	60	17781,51250,38364
28	14471,58031,34222	61	17853,29835,01077
29	14623,97997,89896	2	17923,91689,49825
30	14771,21254,71966	63	17993,40549,45358
31	14913,61693,83427	4	18061,79973,98389
32	15051,49978,31991	65	18129,13356,64286
33	15185,13939,87789	6	18195,43935,54187
34	15314,78917,04226	67	18260,74802,70083

Bild 8: Briggs: *Logarithmorum chilias prima*, erste Seite

Nur ein Jahr später erscheint ein Beitrag von Briggs über das Interpolieren in Logarithmentafeln. Dieser Vorgang muss zuweilen ausgeführt werden, entweder zwischen den Numeri, um einen Logarithmus zu finden, der nicht in der Tafel aufgeführt ist oder zwischen zwei Logarithmuszahlen, um den zugehörigen Numerus zu finden. Er verwendet dazu entweder Proportionalitäten, die Logarithmentafel selbst oder die Zeichnung einer geometrischen Hilfskonstruktion. Entworfen hatte die Figur Edward Wright, der wegen seines Todes keine Erklärung fertigen konnte. Briggs' Beitrag wird als Anhang zur zweiten Auflage von Wrights *A description of the admirable table of logarithmes,* London 1618, publiziert. Auf die Verfahren gehe ich hier nicht ein.

Danach folgt Briggs' *Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades triginta...,* London 1624. Enthalten sind die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20.000 und von 90.000 bis 100.000 mit Kennziffer und 14 Nachkommastellen.

Ein Ablesebeispiel: *log* 17534 = 4,24388,10022,1832 (Bild 9, mittlere Spalte oben). Die beiden Kommas in der Mitte und rechts dienen zur besseren Lesbarkeit der Zahl. Den fehlenden Bereich enthält die zweite Ausgabe, veröffentlicht im Jahr 1628 von Adriaan Vlacq (1600–1667), einem holländischen Verleger und Autor mathematischer Tafeln.

Chilias decimaoctaua.

Num. absolut.	Logarithmi.	Num. absolut.	Logarithmi.	Num. absolut.	Logarithmi.
17501	4,24306, 28648, 0481 2, 48147, 0057	17534	4,24388, 10022, 1832 2, 47679, 9920	17567	4,24469, 76012, 9672 2, 47214, 7329
17502	4,24308, 76795, 0538 2, 48132, 8279	17535	4,24390, 57702, 1752 2, 47665, 8675	17568	4,24472, 23227, 7001 2, 47200, 6614
17503	4,24311, 24927, 8817 2, 48118, 6517	17536	4,24393, 05368, 0427 2, 47651, 7447	17569	4,24474, 70428, 3615 2, 47186, 5916
17504	4,24313, 73046, 5334 2, 48104, 4771	17537	4,24395, 53019, 7874 2, 47637, 6234	17570	4,24477, 17614, 9531 2, 47172, 5233
17505	4,24316, 21151, 0105 2, 48090, 3042	17538	4,24398, 00657, 4108 2, 47623, 5037	17571	4,24479, 64787, 4764 2, 47158, 4566
17506	4,24318, 69241, 3147 2, 48076, 1329	17539	4,24400, 48280, 9145 2, 47609, 3857	17572	4,24482, 11945, 9330 2, 47144, 3915
17507	4,24321, 17317, 4476 2, 48061, 9631	17540	4,24402, 95890, 3002 2, 47595, 2692	17573	4,24484, 59090, 3245 2, 47130, 3280
17508	4,24323, 65379, 4107 2, 48047, 7951	17541	4,24405, 43485, 5694 2, 47581, 1544	17574	4,24487, 06220, 6525 2, 47116, 2662
17509	4,24326, 23427, 2058 2, 48033, 6286	17542	4,24407, 91066, 7238 2, 47567, 0412	17575	4,24489, 53336, 9187 2, 47102, 2059

Bild 9: Briggs' *Arithmetica logarithmica*, Ausschnitt

Die erste vollständige Tafel war das nicht. Die erschien mit den Logarithmen der Zahlen 1 bis 100.000 im Jahr 1627 unter dem Titel *Het tweede deel van de Nieuwe telkonst* und unter dem Namen von Ezechiel de Decker mit einer Danksagung an Vlacq, der offensichtlich mitgearbeitet hatte.[24] Diese Tafel wurde erst 1920 wieder aufgefunden.

Als nächstes veröffentlicht Briggs die *Trigonometria Britannica sive de doctrina triangulorum libri duo,* Gouda 1633. Sie enthält eine Tafel der Logarithmen des sinus und tangens für Hundertstel der Grade auf 14 Nachkommastellen, zugleich mit einer Tafel des sinus, tangens und secans.

[24] Auf die Beziehungen zwischen de Decker und Vlacq geht van Poelje [53] ein.

44. GRAD.

Centesimæ.	Sinus.	Tangentes.	Secantes.	Logarithmi Sinuũ.	Log. Tangent.	M. S
67	70302,24326,73471	98854,66668	140613,81555	9,84696,91831,0067	9,99499,71761	40:12
	12,41114,66007	34,51503	24,26698	7,66635,1036	15,16071	
68	70314,65441,39478	98889,18171	140638,08253	9,84704,58466,1103	9,99514,87832	40:48
	12,40900,46938	34,52695	24,27965	7,66367,5275	15,16065	
69	70327,06341,86416	98923,70866	140662,36218	9,84712,24833,6378	9,99530,03897	41:24
	12,40686,24089	34,53887	24,29232	7,66100,0464	15,16060	
70	70339,47028,10505	98958,24753	140686,65450	9,84719,90933,6842	9,99545,19957	42: 0
	12,40471,97461	34,55081	24,30500	7,65832,6583	15,16054	
71	70351,87500,07966	98992,79834	140710,95950	9,84727,56766,3425	9,99560,36011	42:36
	12,40257,67055	34,56275	24,31768	7,65565,3653	15,16049	
72	70364,27757,75021	99027,36109	140735,27718	9,84735,22331,7078	9,99575,52060	43:12
	12,40043,32870	34,57469	24,33038	7,65298,1666	15,16043	
73	70376,67801,07891	99061,93578	140759,60756	9,84742,87629,8744	9,99590,68103	43:48
	12,39828,94908	34,58666	24,34309	7,65031,0621	15,16039	
74	70389,07630,02799	99096,52244	140783,95065	9,84750,52660,9365	9,99605,84142	44:24
	12,39614,53170	34,59862	24,35579	7,64764,0514	15,16034	
75	70401,47244,55969	99131,12106	140808,30644	9,84758,17424,9879	9,99621,00176	45: 0
	12,39400,07654	34,61059	24,36851	7,64497,1347	15,16029	
76	70413,86644,63623	99165,73165	140832,67495	9,84765,81922,1226	9,99636,16205	45:36
	12,39185,58364	34,62258	24,38124	7,64230,3121	15,16025	

Bild 10: Briggs' *Trigonometria Britannica* 1633, Ausschnitt

Im Kapitel 16 des Vorworts zur *Trigonometria Britannica* schreibt Briggs, dass er für den natürlichen sinus den Radius des Kreises zu $r = 10^{15}$ setzt, d. h. er zeigt in der Tafel (Bild 10, erste Zeile links)

$$10^{15} \times \sin 44{,}67° = 10^{15} \times 0{,}70302\ldots \text{ ohne Bruchteile.}$$

Die Kommas dienen nur zur Gruppierung der Ziffern für bessere Lesbarkeit. Für den Logarithmus des sinus setzt er sin 90° (*sinus totus*) = 10^{10} bzw. *log* (sin 90°) = 10. Die Tafel zeigt deshalb

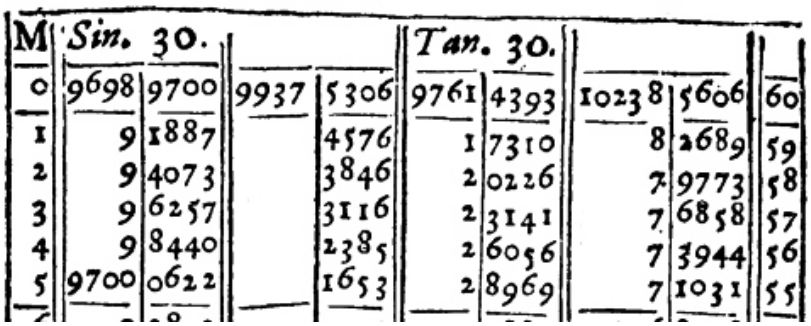
$$\log(10^{10} \times \sin 44{,}67°) = 10 + \log(\sin 44{,}67°) = 10 - 0{,}1530308\ldots = 9{,}8469691\ldots$$

Mit dieser Umformung übernimmt er eine neue Notation, die sein Kollege Gunter erstmals verwendet hat. Man muss darauf achten, dass hier zwei Radien unterschiedlicher Grösse verwendet werden: erstens der Kreisradius 10^{15}, der den Winkelfunktionswert ganzzahlig macht und gleichzeitig dessen Stellenzahl angibt und zweitens der Radius 10^{10} für den *sinus totus*, mit dem 10 zum negativen Logarithmus addiert wird.

Nicht unerwähnt bleiben soll die Veröffentlichung von Vlacqs *Arithmetica Logarithmica* im Jahr 1628. Die Tafel enthält Logartithmen zur Basis 10 der Zahlen und der Winkelfunktionen. Vlacq war ein geschickter und erfolgreicher Verleger und Buchhändler. Das Werk wurde als Vorbild für folgende Tafeln viele Jahre immer wieder aufgelegt – einschliesslich der enthaltenen Fehler. Da Vlacq die sexagesimale Teilung der Winkel wählt und nicht wie bei Briggs die centesimale, hat sich auch erstere in der Folgezeit durchgesetzt.

Edmund Gunter (1581–1626), ab 1619 Professor für Astronomie am Gresham College in London, und Henry Briggs waren Kollegen. Möglicherweise ist es Briggs' Einfluss zu verdanken, dass 1620, noch vor Briggs, sein *Canon triangu-*

lorum sive tabulae sinuum et tangentium artificialium ad radium 10000.0000 et ad scrupulum prima quadrantis... (Trigonometrischer Canon oder Tafeln der künstlichen Sinusse und Tangenten mit einem Radius von 100.000.000 für jede Minute des ersten Quadranten) erscheint. Man beachte die Wortwahl „künstlicher sinus“ für die Logarithmen auch hier noch. Die Zusammenstellung ist die erste gedruckte Tafel mit Logarithmen trigonometrischer Funktionswerte zur Basis 10.



M	Sin. 30.				Tan. 30.				
0	9698	9700	9937	5306	9761	4393	10238	5606	60
1	9	1887		4576	1	7310	8	2689	59
2	9	4073		3846	2	0226	7	9773	58
3	9	6257		3116	2	3141	7	6858	57
4	9	8440		2385	2	6056	7	3944	56
5	9700	0622		1653	2	8969	7	1031	55

Bild 11: Gunters *Canon triangulorum*, Ausschnitt 30°

Die Darstellung von *log (*sin 30°) (Bild 11, links oben) muss wie bei Briggs einige Jahre später gelesen werden als

$$log\ (10^{10} \times \sin 30°) = 10 + log \sin 30° = 10 - 0{,}301029996... = 9{,}6989700...$$

Der *Canon triangulorum* wird 1623 nochmals aufgelegt, im gleichen Jahr erscheint das Werk zudem mit englischem Titel und Vorwort. Gunter arbeitet nicht nur an den theoretischen Aspekten seines Arbeitsfeldes. Er erfindet zudem Rechen- und Messhilfen für Astronomen, Navigatoren und Landvermesser.

Auf die beiden multiplikativen Faktoren soll nachfolgend näher eingegangen werden, weil der Nutzen zweier Radien manchmal nicht leicht zu durchschauen ist. Dazu werden Tafeln aus verschiedenen Zeiten herausgegriffen und sowohl ihre Kurzbeschreibung als auch die Angabe des Wertes *log* (*sin* 30°) = – 0,30102999... aufgeführt:

Gunter *Canon triangulorum,* 1620, im Titel:

„Tabulae Sinuum et Tangentium artificialium ad Radium 10000.0000“
*log (*sin 30°) = 9698|9700.
Bei Gunter haben die um 10 vermehrten Kennziffern für Logarithmen trigonometrischer Werte, wie wir sie bis zum Ende der Logarithmentafeln im 20. Jahrhundert finden, ihren Ursprung. Der Radius 10^8 bezieht sich auf die achtstellige Anzeige, nicht auf die Addition von 10. Warum er eine solche Notation wählt geht aus dem Vorwort nicht hervor, weder in der lateinischen noch in der englischen Ausgabe. Eine naheliegende Erklärung besteht darin, dass Gunter negative Logarithmen bzw. negative Kennziffern vermeiden will. Die Wahl der 10 als Summand liegt nahe, weil sie die

Basis des Logarithmensystems darstellt und gross genug ist, um auch die Logarithmen kleinster Winkelfunktionswerte in Tafeln noch positiv darzustellen.

Briggs *Trigonometria Britannica,* 1633, Kap. 16:

„The logarithm is required for the radius of the circle or the total sine, which is set by me as 10,00000,00000,0000. The logarithm agreeing to this radius is set at 100000,00000, of which the characteristic... is 10 for the number of places [the logarithm in modern notation is thus 10.000000000].“[25]

log sin 30° = 9,69897,00043,3602.

Der Radius 10^{15} benennt die Stellenzahl der Notation. Der Radius *sinus totus* bzw. sin 90° wird zu 10^{10} gesetzt, sein Logarithmus beträgt 10.

Vlacq *Tabellen der Sinuum...: wie auch der Logarithmorum...,* 1689:

„...sind die Logarithmi aller zahlen der Sinuum und Tangentium gesucht worden / den halben Zirckel-bogen gerechnet auff 1000000000,[26] welchem der Logarithmus 10.0000000000 ist beygefügt / und also folgends die andern.“

log sin 30° = 9,6989700.

Mit anderen Worten: $r = 10^{10}$, *log* (sin 90°) = 10.

Vega *Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch*, 2. Aufl., Leipzig 1800:

„für den Logarithmus des Halbmessers oder *log.sin.tot.* = 10,0000000 eingerichtet...“

log sin 30° = 9,6989700.

Hier steht das Komma für ein echtes Dezimaltrennzeichen.

Die Addition von 10 wurde noch weiter beibehalten, als man die Winkelfunktion als Verhältnis zweier Seiten ansah bzw. den Kreisradius mit 1 ansetzte.

Wir müssen ein zweites Mal zu Napier zurückkehren, um einen Aussenseiter unter den Berechnern von Logarithmen zu würdigen.

Jost Bürgi

Während Napier seine Logarithmen rechnete, tat dies auch völlig unabhängig von ihm der Mathematiker, Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi[27] (1552–1632), ohne Kenntnis von Napiers Arbeiten zu haben. Allerdings veröf-

---

[25] Zitiert nach Ian Bruce [8].

[26] Der Text wird nur verständlich, wenn man annimmt, dass zu dieser Zahl eine Null fehlt.

[27] Sein Name wird auch mit Burgi, Borgen oder Byrgius angegeben (zitiert nach Neue Deutsche Biographie. Band 2, Berlin 1955).

fentlichte er seine Tafel trotz Drängens von Johannes Kepler erst 1620. Der vollständige Titel lautet *Aritmetische und Geometrische Progreß-Tabulen / sambt gründlichem unterricht / wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen / und verstanden werden sol.*
Das Werk erschien zu Beginn des Dreissigjährigen Krieges unter widrigen Umständen, sechs Jahre nach Napiers *Descriptio*, und blieb ohne Folgen auf die Entwicklung der Logarithmen. Der im Titel genannte *Unterricht*, eine Art Gebrauchsanleitung mit Rechenbeispielen, ist in den Tafeln nicht enthalten, er wurde erst 1855 aufgefunden und ein Jahr später veröffentlicht. Deshalb konnte man mit der Tafel wenig anfangen, weil lange Zeit Unklarheit über die Interpretation der Zahlen und über den Gebrauch der Tafel bestand.

Bürgi verwendet eine ungewöhnliche Schreibart der Dezimalbrüche, die ohne den genannten *Unterricht* unverständlich bleiben muss und die man später dennoch aus historischer Sicht kontrovers mit unterschiedlichen Ergebnissen diskutiert hat. Die Autoren Lutstorf und Walter [47] geben eine umfassende Darstellung des Werkes und seines historischen Hintergrundes. Der *Unterricht* ist bei ihnen ebenfalls abgedruckt. Roegel [78] bewertet die bisherigen Interpretationen der Tafel Bürgis und stellt seine Sicht dar.

Wenngleich Bürgis Tafel keine Bedeutung erlangte, erweist es sich dennoch als vorteilhaft, das Werk näher zu betrachten, weil es in manchen Eigenschaften fortschrittlichere Ideen aufweist als die Tafel von Napier.
Bürgi setzt die arithmetische Folge 0, 10, 20, 30... (rot) als Logarithmen der geometrischen Folge 1; 1,0001; $1{,}0001^2$; $1{,}0001^3$... (schwarz) als Numeri gegenüber. Die Numeri sind durchgehend 9-stellig dargestellt, jedoch ohne Angabe des Dezimaltrennzeichens[28]. Seine Tafel enthält die Logarithmen für die Numeri 1 bis 10, die dem ersten Anschein nach auch als 1×10^8 bis 10×10^8 gesehen werden können, nicht für Winkelfunktionswerte. Sie sind verkürzt angegeben, sich wiederholende Ziffernfolgen werden nur einmal notiert. Bürgi nennt Numeri „schwarze Zahlen“, Logarithmen die „roten Zahlen“ und lässt sie auch in zwei Farben drucken. Den Begriff Logarithmus verwendet er nicht. Das Titelblatt (Bild 12) ist bereits eine kleine Tafel, die roten Zahlen im äusseren Kreis sind die zugeordneten Logarithmen der schwarzen Zahlen im inneren Kreis.

[28] Als Dezimaltrennzeichen dient ihm eine kleine Null über der Einerziffer $\left(\overset{\circ}{3}\right)$, eine Variante der Darstellung, die dem Drucker zusätzlich zum Zweifarbendruck aus verständlichen Gründen erhebliche Schwierigkeiten bereitet haben muss. Bürgi führt zu seiner Dezimalschreibweise u. a. aus, dass bei einem fehlenden Trennzeichen die Zahl zwischen 0 und 10 liegt.

Bild 12: Bürgis *Progress-Tabulen*, Titelblatt

Den Anfang der *Progress-Tabulen* zeigt das folgende Bild:

	0	500	1000	…	3500
0	100000000	100501227	101004966		103561790
10	10000	11277	15067		72146
20	20001	21328	25168		82503
30	30003	31380	35271		92861
40	40006	41433	45374		103603221
50	50010	51487	55479		13581
60	60015	61543	65584		23942
…					
500	100501227	101004966	^{1015}11230		^{1040}80869

Am linken Rand und oben stehen Summanden der Logarithmen in rot, die zusammengezählt werden müssen, beispielsweise 0(oben) + 20(links) = 20 oder

30(links) + 500(oben) = 530. Im Schnittpunkt von Zeile und Spalte steht der zugehörige Numerus in schwarz. Einige Ablesebeispiele:

$logBur\ 10^8 \times 1{,}00000000 = 0$
$logBur\ 10^8 \times 1{,}00010000 = 10$
$logBur\ 10^8 \times 1{,}00020001 = 20$
$logBur\ 10^8 \times 1{,}00501227 = 500$
$logBur\ 10^8 \times 1{,}00511277 = 510$

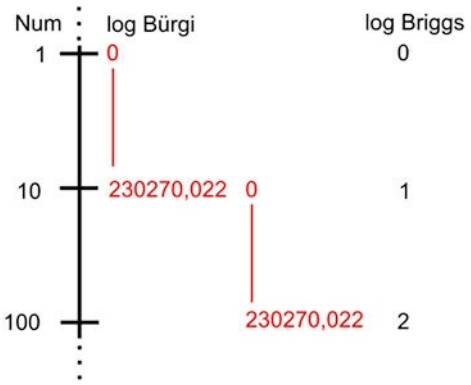
allgemein $logBur\ 10^8 \times \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{\frac{n}{10}} = n$

Am Ende der Tafel gibt Bürgi den in mehreren Interpolationen ermittelten Wert

$logBur\ 999999999\ (\approx 10^8 \times 10) = 230270{,}022$

Dieser Wert ist wichtig, weil er bei Rechnungen mit Potenzen von 10 benötigt wird. Seine Grösse macht den Umgang mit Potenzen von 10 nicht so einfach wie später bei Briggs. Da bei Bürgi als Eingang in die Tafel die gleichmässig gestuften Logarithmenzahlen dienen sieht man seine Tafel auch als Antilogarithmentafel an, mit der man zu einem gegebenen Logarithmus den zugehörigen Numerus findet.

Über den Wertebereich der Numeri existieren unterschiedliche Auffassungen. Lutstorf [47] sieht ihn als 1 bis 10 an, wobei das Rechnen mit grösseren Zahlen deswegen nicht ausgeschlossen ist. Roegel betrachtet in seinem Kommentar zur Rekonstruktion der Tafel von Bürgi diese als zirkulär angelegt. Er stützt sich dabei auf die Rechenbeispiele im zugehörigen *Unterricht*. Gemeint ist, dass die Numeri der Tafel nicht nur im Bereich 1 bis 10 oder 10^8 bis 10^9, sondern in jedem Bereich zwischen 10^n und 10^{n+1} liegend angesehen werden können. Daraus ergäbe sich, dass die Zuordnung zwischen Numeri und Logarithmen nicht umkehrbar eindeutig wäre, es gelte vielmehr



$logBur\ 0{,}1 \equiv logBur\ 1 \equiv logBur\ 10\ldots = 0$.
Diese Gleichsetzungen gelten selbstverständlich nicht nur für Potenzen von 10 sondern für jeden Numerus:
$logBur\ z \equiv logBur\ z \times 10^n$. Eine „Bürgische Logarithmenskala“ sieht dann wie links dargestellt aus. Man kann mit einem solchen System durchaus rechnen, muss jedoch stets beim Wechsel von einem Wertebereich in den anderen den Sprung in den Werten der Logarithmen berücksichtigen.

Negative Logarithmen kommen bei Bürgi nicht vor. Im Anhang 3.3 werden Rechenbeispiele mit den Logarithmen von Bürgi ausgeführt.
Obwohl sich bei Bürgi die Logarithmen in den Wertebereichen 10^n bis 10^{n+1} wiederholen ist der Wechsel über eine Zehnerpotenz hinaus umständlich zu

vollziehen. Zudem gilt in einem solchen Fall $logBur\, x{\times}y \neq logBur\, x + logBur\, y$. Der Vorteil des Brigg'schen Systems ist hierbei klar erkennbar.

Für Roegel sind die Bürgischen roten Zahlen keine Logarithmen. Er bringt diese Auffassung im Titel *Bürgi's Progress Tabulen (1620): logarithmic tables without logarithms* seiner Neufassung zum Ausdruck. Als Begründung führt er zum einen die fehlende umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Numeri und Logarithmen an. Des Weiteren tritt nach seiner Meinung nicht bei Bürgi sondern erst bei Napier der abstrakte Begriff des Logarithmus zu Tage. Bürgis Konzept hingegen basiere auf dem Gedanken der Hilfszahlen zum Rechnen und stehe Stifel nahe. Solche Bewertungen führen zu einer ungewöhnlichen Frage, die man an dieser Stelle nicht erwartet.

Was sind Logarithmen?

Man könnte auch fragen zu welchem Zeitpunkt in diesem diskontinuierlichen Entwicklungsprozess zum ersten Mal Logarithmen aufgetreten sind. Gemeint sind die historischen Logarithmen, definiert über Proportionen, nicht die modernen. Eine Antwort auf diese Frage ist keineswegs von nur theoretischer Natur, sie bestimmt vielmehr die Priorität einer Erfindung, auf welche die Wissenschaftsgeschichte stets so grossen Wert legt.

Quellen der Entwicklung zu den Logarithmentafeln von Napier und Bürgi hin sind zweifelsfrei Stifel und seine Vorgänger. Aus den Zuordnungen zwischen den Gliedern einer geometrischen und einer arithmetischen Folge lassen sich sowohl Hilfszahlen bestimmen als auch Rechenvorschriften ableiten, mit deren Hilfe die Vereinfachung höherer Rechenarten möglich wird. Auch wenn das Kunstwort Logarithmus erst später geschaffen wurde sind mit ihm zunächst ausschliesslich Hilfszahlen gemeint, die von Napier auch so bewertet werden. Bei Napier sieht Roegel die Trennung zwischen logarithmischem Rechnen mit Hilfszahlen und den Logarithmen selbst. Zwei Gründe sind für ihn ausschlaggebend: Logarithmen müssen eine Funktion ihrer Numeri sowie umkehrbar eindeutig zuordenbar sein. Nach seiner Auffassung hat erst Napier zumindest die Vorstellung einer Funktion. Zum Unterschied zwischen Napier und Bürgi schreibt er zusammenfassend

> „Beide definieren eine Zuordnung zwischen einer arithmetischen und einer geometrischen Folge. Für Bürgi ist diese Zuordnung der Ausgangspunkt, für Napier hingegen ist die Zuordnung das Resultat einer abstrakten Definition.“[29]

Folgt man dieser Argumentation werden erst mit Napiers kinematischem Ansatz die Hilfszahlen zu Logarithmen. Eine andere Meinung vertritt Gronau[30]. Er meint, dass weder Bürgi noch Napier einen funktionalen Ansatz für das ver-

[29] Roegel [78], Ausg. 12. Sept. 2012, Abschn. 5.6.3, Übersetzung von mir.

[30] Gronau [74], Abschn. Ia.

einfachende logarithmische Rechnen gefunden haben. Das sei erst Kepler gelungen. Andere Autoren machen keine Aussage über eine Funktion bei Napier. Tatsache bleibt, dass erst Napier mit seinem kinematischen Modell einen stetigen Ansatz wählt. Folgt man einer angenommenen Verbindung zwischen Logarithmus und Funktion, dann wird die Frage nach dem Zeitpunkt der Bewertung einer Hilfszahl als historischer Logarithmus abhängig vom Auftreten einer Logarithmusfunktion oder zumindest einer Annäherung an sie.
Im Rahmen dieses Aufsatzes kann eine weiter gehende Diskussion der aufgeworfenen Frage oder gar eine Antwort nicht gegeben werden. Die Frage nach der Priorität, nach dem erstmaligen Auftreten von Logarithmen, lässt sich deshalb nur differenziert beantworten. Das abgekürzte Rechnen mit Hilfszahlen ist keine Erfindung Napiers. Das Prinzip des Verfahrens kannte man schon vor ihm. Er hat vielmehr die erste brauchbare Logarithmentafel entworfen und berechnet. Mit brauchbar ist eine kleine Stufung gemeint, die eine genügend grosse Anzahl von Numeri ohne Interpolationen zur Verfügung stellt. Den Ruhm der ersten brauchbaren Tafel muss er sich mit Bürgi teilen, der zwar später publiziert, aber in etwa zur gleichen Zeit wie Napier zu rechnen begonnen hatte. Neu bei Napier ist zudem die Definition der Hilfszahlen, jetzt Logarithmen genannt, sowohl mit Proportionen als auch über einen funktionalen Ansatz kinematischer Art.

Wenn auch manches für die Unterscheidung zwischen logarithmischem Rechnen und Logarithmen spricht, für Vergleiche der unterschiedlichen Hilfszahl- bzw. Logarithmensysteme ist sie wenig brauchbar. Wie bereits im Verlauf der bisherigen Erläuterungen geschehen bin ich daher der Übung einiger früherer Autoren gefolgt und spreche generell von Logarithmen, die mit dem Namenszusatz des Entwicklers spezifiziert sind.

Die Frage nach der Basiszahl

Eine Frage, die in der Vergangenheit immer wieder gestellt worden ist betrifft die Basiszahl früher Logarithmensysteme. Die Verwendung des Begriffs Basiszahl unterstellt bereits die moderne Definition des Logarithmus nach $Z = b^n$; $n = log_b Z$ mit der Basiszahl b und vor allem mit der Folge $log_b 1 = 0$.

Eine Zusammenstellung der Arbeiten zum Basisproblem gibt Mautz [77]. Er begründet auch, warum diese Frage überhaupt gestellt worden ist:

> „In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts fand die Definition des Logarithmus durch den grossen Einfluss Eulers allgemeine Verbreitung... Soll man wegen Napier zwei verschiedene Arten von Logarithmen unterscheiden oder soll man darnach trachten, die Napiersche Definition mit der später auftretenden in Einklang zu bringen? Kann eine Übereinstimmung der Definitionen erzielt werden ohne dass man wesentliche Änderungen an den Logarithmensystemen vornimmt? Diese Fragen bildeten den Ursprung des Basisproblemes und zeitigten viele Kontroversen...“

Aufschlussreich ist auch folgender Satz weiter unten:

> „Die Erfinder der Logarithmen dachten nicht an eine Logarithmenbasis und erst die später einsetzende Entwicklung der Logarithmentheorie drängte dazu, nachträglich den Napierschen und Bürgischen Logarithmen eine Basis zuzuschreiben."

Offensichtlich ist niemand auf die Idee gekommen, zwischen historischen Hilfszahlen bzw. Logarithmen und Logarithmen moderner Definition zu unterscheiden.

Über die Basiszahlen e und $1/e$ st bereits weiter oben geschrieben worden. Sie ergeben sich aus Umformungen des funktionalen Ansatzes und sind nur formal, ohne Entsprechung in der Realität, richtig, weil weder Napier noch Speidell noch Bürgi an eine Basiszahl gedacht haben und darüber hinaus die Zahl e nicht kennen konnten.
Das Problem der Basiszahl bei Zuordnungen zwischen den Elementen in arithmetischen und geometrischen Folgen besteht u. a. darin, dass die moderne Definition mit $b^0 = 1$ bzw. $log_b\, 1 = 0$ nur einen Sonderfall in der Definition über Proportionen darstellt. Mautz untersucht die Zuordnungen $log\ 1 = 0$ und $log\ a = 0$ und zeigt, unter welchen Bedingungen man Basiszahlen ableiten könnte. Er kommt zu dem Ergebnis, dass die gewünschte Übereinstimmung mit dem modernen Logarithmensystem häufig nicht herstellbar ist. Entweder entsprechen die Rechenregeln nicht den modernen, weil das zusätzliche Glied $log\ 1 \neq 0$ auftritt oder aber die Zuordnungen sind mehrdeutig oder Zahlenwerte in den Tafeln können unterschiedlich interpretiert werden und machen die Bestimmung einer Basiszahl unmöglich.
Die Rückrechnung einer Basiszahl in historischen Logarithmensystemen ist, sofern überhaupt möglich, immer eine nachträgliche Umdeutung, deren Aussagekraft für sich bewertet werden muss.

Die Situation nach Napier

Von Napiers Logarithmen gehen unbestreitbar neue Impulse für die angewandte Mathematik aus. Sie gehören zu den grossen Fortschritten des 17. Jahrhunderts. Er zeigt, dass man ein brauchbares System zur Vereinfachung von Rechnungen erstellen kann. Dieser Nachweis wie auch die Unzulänglichkeit seines Systems geben anderen Autoren Anlass für Veränderungen, sodass für kurze Zeit parallel neben der Bearbeitung durch Briggs weitere Logarithmensysteme erdacht werden. Daraus entsteht in den ersten 20 Jahren nach der Veröffentlichung von Napiers *Descriptio* ein uneinheitliches Bild der als neu publizierten Logarithmentafeln, wie sich aus der nachfolgenden Aufstellung der Tafelwerte für log (sin 30°) entnehmen lässt.

Autor	**Tafelwert für *log* (sin 30°)**	**System**
Napier 1614	6931469	Napier
Ursinus 1618	69314718	Napier
Speidell 1619	930685	Speidell
Gunter 1620	96989700	Briggs
Bürgi 1620	*logBur* 0,5 = 16950 – 230270 = –213320	Bürgi, die Numeri sind keine Winkelfunktionswerte
Kepler 1624	69314.72	Napier
Briggs 1633	9.69897000	Briggs
Crüger 1634	69315	Napier

Sieht man von der unterschiedlichen Stellenzahl und der Schreibweise des Dezimalbruchs ab werden in zwanzig Jahren nach 1614 vier Logarithmensysteme entwickelt und publiziert: die von Napier, von Speidell, von Bürgi und von Gunter / Briggs. Bürgi muss man insofern gesondert betrachten als er Napiers Werk nicht gekannt haben kann und deshalb auch nicht von ihm beeinflusst war. Erst nach etwa zwanzig Jahren verschwinden diese Parallelentwicklungen und das System Napier / Briggs wird vollständig übernommen.

Der Mathematiker Caramuel gibt in seinem Werk aus dem Jahr 1670 eine ausführliche Darstellung der Logarithmensysteme seit 1614, die er vergleichend in einer kleinen Tabelle zusammenstellt (Bild 13) [71, 2. Bd. ab S. 794].

Numeri naturales.	*Logarithmi Vlacquii.*	*Logarith. Neperi, & Kepleri.*	*Logar. Caramuelis.*
1	0.	2302,585.20.	10.
10	1.	2072,326.68.	9.
100	2.	1842,068.16.	8.
1,000	3.	1611,809.64.	7.
10,000	4.	1381,551.12.	6.
100,000	5.	1151,292.60.	5.
1;000,000	6.	921,034.08.	4.
10;000,000	7.	690,775.56.	3.
100;000,000	8.	460,517.04.	2.
1,000;000,000	9.	230,258.52.	1.
10,000;000,000	10.	000,000.00.	0.

Bild 13: Vergleich der Logarithmensysteme bei Caramuel

Darin sind links Zehnerpotenzen von 10^0 bis 10^{10} dargestellt, nach rechts folgend hierfür die Logarithmen von Briggs / Vlacq, von Napier / Kepler und ein System, das er mit seinem Namen bezeichnet. Die Tafel von Speidell wird nicht genannt.

Neben dem umfassenden Vergleich der Systeme enthält Caramuels Werk noch eine mathematikhistorische Besonderheit. Briggs hatte Napier gegenüber einen Vorschlag für das Grundgerüst eines neuen Systems vorgetragen, den er jedoch nach einer Diskussion mit Napier zu Gunsten dessen Vorschlag beiseite legte. Der Vorschlag beinhaltete die Festlegungen $logBri\ 10^{10} = 0$ und $logBri\ 1 = 10$. Nachdem Briggs seinen Vorschlag verworfen hatte, war dieser noch nicht aus der Ideenwelt der Logarithmen verschwunden. Caramuel möchte zwei Vorteile in einem Logarithmensystem vereinigen. Von Briggs übernimmt er die ganzzahlige Stufung der Logarithmen für Potenzen von 10. Da hierbei $log(sin\ tot \equiv 10^{10})$ nicht Null wird möchte er zudem diesen Ausdruck wie bei Napier Null setzten. Als Begründung gibt er an, er käme zuweilen in trigonometrischen Berechnungen vor. Das war auch Napiers Beweggrund bei seinem ersten System. Aus beiden Bedingungen ergeben sich Logarithmen wie sie in der Aufstellung oben unter *Logar. Caramuelis* aufgeführt sind. Diese Vorgabe entspricht genau Briggs' erstem Vorschlag. Wegen der Vereinigung zweier Vorzüge nennt er sie vollendete Logarithmen (*logarithmi perfecti*). In Bild 14 ist der Anfang seiner Tafel ab S. 852 wiedergegeben. Nach Henderson [35] ist dies die einzige Tafel mit einer derartigen Zuordnung überhaupt.

Num.	Logar.cum diff.	Num.	Logar.cum diff.	Num.	Logar.cum diff.	Num.	Logar.cum di.
0		24	8.61978.88	48	8.31875.88	72	8.14266.7
			1772.88		895.49		599.(
1	10.00000.00	25	8.60206.00	49	8.30980.39	73	8.13667.7
	30103.00		1703.33		877.39		590.8
2	9.69897.00	26	8.58502.67	50	8.30103.00	74	8.13076.5
	17609.13		1639.05		860.02		582.9
3	9.52287.87	27	8.56863.62	51	8.29242.98	75	8.12493.3
	12493.87		1579.42		843.31		575.
4	9.39794.00	28	8.55284.20	52	8.28399.67	76	8.11918.(
	9691.00		1524.00		827.26		567.'
5	9.30103.00	29	8.53760.20	53	8.27572.41	77	8.11350.
	7918.13		1472.33		811.79		560.
6	9.22184.87	30	8.52287.87	54	8.26760.62	78	8.10790.
	6694.67		1424.04		796.89		553.
7	9.15490.20	31	8.50863.83	55	8.25963.73	79	8.10237.
	5799.20		1378.83		782.53		546.
8	9.09691.00	32	8.49485.00	56	8.25181.20	80	8.09691.
	5115.25		1336.39		768.69		539.
9	9.04575.75	33	8.48148.61	57	8.24412.51	81	8.09151.
	4575.75		1296.50		755.31		532.
10	9.00000.00	34	8.46852.11	58	8.23657.20	82	8.08618.
	4139.27		1258.91		742.40		526

Bild 14: Caramuels *logarithmi perfecti*, der Anfang der Tafel

Briggs beschreibt seinen ersten Vorschlag in der *Arithmetica Logarithmica*, Abschnitt Vorwort an den Leser. Dass Caramuel als Kundiger in Sachen Logarithmen diese Passage nicht gekannt haben soll erscheint unwahrscheinlich. Er erwähnt Briggs des Öfteren, als Quelle oder Anregung seines Systems hingegen nennt er ihn nicht.

Die Methode des Rechnens mit Logarithmen gibt schon kurz nach dem Veröffentlichen erster Tafeln einer weiteren neuen Idee einen Impuls. Gemeint sind die logarithmischen Rechengeräte.

Logarithmische Rechengeräte

Wenn man durch Addieren und Subtrahieren der Logarithmen rechnen kann liegt die Idee nahe, man könne diese Operationen auch mechanisch mit dem Abgeifen von Strecken vorgegebener Längen ausführen. Aus der Umsetzung dieser Idee gehen die logarithmische Skala und später der Rechenschieber mit gegeneinander verschieblichen Skalen hervor.

Edmund Gunter bildet 1620 die Logarithmen als Strecken ab und trägt diese zusammen mit anderen geteilten Linien auf ein Lineal auf. Er kann dann mit dem Stechzirkel Strecken aufnehmen, an anderer Stelle anlegen und auf diese Weise Berechnungen aus der Trigonometrie und Navigation ausführen (Bild 15). Seefahrer greifen gerne auf dieses Hilfsmittel zurück, sie nennen es *gunter's scale* oder *gunter scale* oder einfach nur *gunter*.
William Oughtred (1575–1660) schlägt im Jahr 1627 aneinander gleitende logarithmische Skalen vor. Robert Bissaker baut 1654 einen vierkantigen Rechenschieber mit beweglicher Zunge – der älteste bis jetzt bekannte. Er trägt mehrere von der Gunter-Skala abgeleitete Skalen. Der folgenden weit verzweigten und facettenreichen Geschichte des logarithmischen Rechenschiebers soll nicht weiter nachgegangen werden. Hierüber existiert vielfältige Fachliteratur.

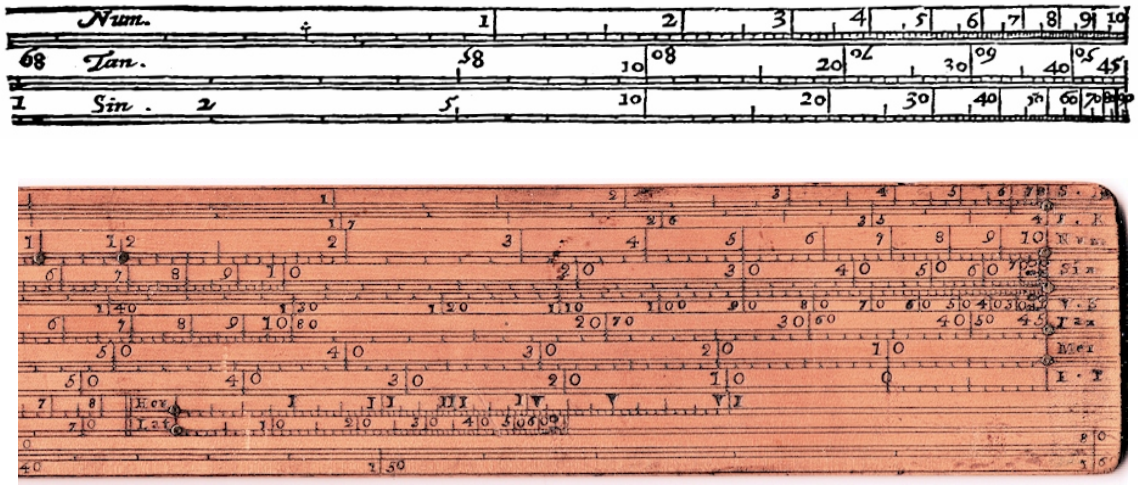


Bild 15: Gunter-Scale
oben: line of numbers,
unten: die rechte Hälfte eines Originals

Grosse Tafeln und ihre Fehler

Die Logarithmen begründeten einen Aufschwung im Bereich der angewandten Mathematik, weil Rechnungen möglich wurden, die vorher nicht so einfach durchführbar waren. Logarithmentafeln wurden gebraucht. Sieht man von den wenigen später neu und mit besseren Methoden berechneten Tafeln ab, bilden die Werke von Briggs und Vlacq die Ausgangspunkte für alle folgenden Tafeln. Sogar das grosse Tafelwerk des 20. Jahrhunderts, die *Logarithmetica Britannica* von Alexander John Thompson, das letzte mit grossem Umfang überhaupt, greift in seiner Neuberechnung auf Briggs zurück. Wenn die ersten Tafeln einen Ausgangspunkt bilden heisst das einfach nur, dass sie immer wieder neu herausgegeben, man könnte auch sagen abgeschrieben wurden – einschliesslich ihrer Fehler.

Der Mathematiker, Philosoph und Erfinder Charles Babbage (1791–1871) kennt die Problematik der Fehler und untersucht historische und zeitgenössische Logarithmentafeln. Seine Idee einer Differenzenmaschine, mit der man fehlerfreie Tafeln berechnen kann, geht auf die festgestellte Unzulänglichkeit der vorhandenen Tafeln und auf den hohen Aufwand bei der Herstellung möglichst korrekter Tafeln zurück. Fehler konnten bei der Berechnung, bei der Übertragung der Ergebnisse in die Druckvorlage und schliesslich beim Setzen selbst entstehen. Im Jahr 1827 veröffentlicht er einen Artikel über die Ergebnisse seiner Untersuchungen, dem er eine Tabelle mit den häufigsten wiederkehrenden Fehlern beifügt [4]. Die Tabelle ist in Bild 16 aufgeführt.
Die Aufstellung gibt die sechsten und siebten, zuweilen auch noch die folgenden Stellen der Tafelwerte, wobei die falschen überstrichen sind. Die Wiederholung der immer gleichen Fehler ist offensichtlich. Unabhängig von der Qualität der Fehler kann die Schlussfolgerung nur lauten, die Tabellenwerte sind immer wieder abgeschrieben worden.

24,626	38,962	57,628	57,629	63,747	67,951	Natural Numbers.	
$3\bar{9}751$	$1\bar{3}420$	$35\bar{8}75$	$10\bar{4}36$	$97\bar{4}12$	$58\bar{4}24$	Vlacq, fol. Gouda	1628
$3\bar{9}751$	$1\bar{3}420$	$35\bar{8}75$	$10\bar{4}36$	$97\bar{4}12$	$58\bar{4}24$	Vlacq, fol. London	1633
39	$1\bar{3}$	35	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	E. Wingate, 12mo. London ..	1633
$3\bar{9}7$	$1\bar{3}4$	$35\bar{9}$	$10\bar{4}$	$97\bar{4}$	$58\bar{4}$	Newton, fol. London	1658
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Sherwin, 8vo. 1st ed. London ..	1726
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Sherwin, 8vo. 2nd ed. London ..	1741
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Sherwin, 8vo. 3rd ed. London ..	1742
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Gardiner, 4to. London	1742
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Sherwin, 8vo. 4th ed. London ..	1761
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Sherwin, 8vo. 5th ed. London ..	1770
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Gardiner, 4to. Avignon	1770
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Schulze, 8vo. Berlin	1778
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Gardiner, 4to. Fiorenze	1782
39	12	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Taylor, 4to. London	1792
38751	12420	35475	10836	97512	58524	Vega, fol. Leipsic	1794
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Callet, 8vo. Paris	1795
$\bar{4}0$	$1\bar{3}$	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Delambre, Tab. Dec., 4to. Paris	1801
39	12	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Hutton, 8vo. 4th ed. London ..	1804
39	12	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Hutton, 8vo. 5th ed. London ..	1811
39	12	35	11	98	59	Vega, 8vo. 5th ed. Leipsic	1820
39	12	$3\bar{6}$	$1\bar{0}$	$9\bar{7}$	$5\bar{8}$	Hutton, 8vo. 6th ed. London ..	1822
39	12	35	11	98	59	Babbage, 8vo. London	1826

ASTRON. SOC. OF LOND. VOL. III. K

Bild 16: Aufstellung von Babbage über die wiederkehrenden Fehler in Logarithmentafeln

Babbage berichtet zudem von einer Tafel mit chinesischen Schriftzeichen aus der Bibliothek der Royal Society, in der die gleichen Fehler wie bei Vlacq enthalten sind. Auch sie muss abgeschrieben worden sein. Als fehlerfrei nennt er die Tafeln von Vega, die gegenwärtige von Callet und seine eigene.[31]

Als Korrektur der vorhandenen Tafeln werden immer wieder Fehlerlisten veröffentlicht. Manche Herausgeber setzen Geldpreise aus für jeden, der einen bisher unbekannten Fehler findet. In einem Bericht schreibt Gernerth [23] 1863 mit einem gewissen Spott über die Qualität einer zeitgenössischen Tafel

> „Der Verleger von Köhlers Tafeln setzte in der ersten Auflage für jeden Fehler einen Louisd'or aus, war aber vorsichtig genug, es in den folgenden Auflagen nicht mehr zu thun, wodurch er jedenfalls viel Geld erspart hat...“

und gibt auch gleich eine aufschlussreiche Begründung

> „...da seither Schrön (*Logarithmentafeln, Braunschweig, 1860, Vorrede, S. 5*) nicht weniger als 455 andere Fehler in der achten Decimalstelle der Lo-

---

[31] Callet, Jean-François:*Tables Portatives de Logarithmes contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusq'à 108,000...* erstmals Paris 1795,
Vega, Jurij: *Logarithmische, trigonometrische,und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln*, erstmals Wien 1783,
Babbage, Charles: Tafel *Table of the Logarithms of the Natural Numbers from 1 to 108000,* London 1841, die wiederholt aufgelegt wird [14]. Sie ist nicht wie zuweilen vorgetragen mit Hilfe einer Maschine gerechnet.

> garithmen der Zahlen 102000 bis 108000 gefunden hat, die aber auch genau übereinstimmend in Callet, Babbage und Vega-Hülsse vorkommen. Und dennoch gehören Köhler's Logarithmentafeln unstreitig zu den correctesten, die erschienen sind.“

Wie berichtet wird war das kein Einzelfall. Gernerth stimmt in seinen Untersuchungen nicht in allen Punkten mit den Feststellungen von Babbage überein, kommt jedoch letztendlich zum gleichen Ergebnis wie dieser, nämlich dass manche Tafeln als nicht zuverlässig gelten. Zwischenzeitlich sollen Korrekturtabellen helfen und Diskussionen werden geführt über die Art der Fehler und ihre Häufigkeit [25, 26]. Man stellt fest, dass die Fehlerhäufigkeiten von Tafel zu Tafel, abhängig vom Herausgeber bzw. früheren Bearbeiter, erheblich variieren. Während in den ersten Jahrzehnten nach Napier die Toleranz gegenüber Tafelfehlern noch grösser war plädiert Gernerth Mitte des 19. Jahrhunderts für eine strenge Auffassung: der Fehler darf höchstens eine halbe Einheit in der letzten Stelle betragen. Mit anderen Worten muss das Runden richtig ausgeführt werden. Mit diesem strengen Massstab erhöht sich zwangsläufig die Anzahl der Fehler in einer alten Tafel auf Hunderte. So stellt man fest, dass Vlacqs Tafel 603 Fehler aufweist, die Hälfte davon jedoch angeblich unbedeutend.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts kennt Charles Babbage diese Zustände und deren Ursachen aus eigener Erfahrung. Er sucht eine Lösung für das Problem und findet sie in der maschinellen Berechnung mit möglichst automatischem Ausdruck. Im Rechenverfahren greift er auf die Methoden der Differenzenrechnung zurück [45].

Diskrete Logarithmen

Napiers Vorstellung von den „künstlichen“ Zahlen, die die Arbeit mit den „natürlichen“ Zahlen erleichtern sollen, bekommt zu Begin des 20. Jahrhunderts im Zusammenhang mit Rechenhilfen eine neue Ausprägung. Der zunehmende Einsatz ganz unterschiedlicher Systeme in mechanischen Rechenmaschinen veranlasst Karl Hoecken im Jahr 1913 zu einem Artikel über mechanische Rechenmaschinen [37]. Im besonderen geht er auf die Mechanismen der sogenannten reinen Multipliziermaschinen digitaler Bauart ein. Das sind Maschinen, die nicht wie andere Rechenmaschinen durch fortgesetzte Addition in mehreren aufeinander folgenden Arbeitsgängen sondern direkt unmittelbar multiplizieren. Dazu muss der Mechanismus in einem Arbeitsgang aus zwei einstelligen Zahlen jedes Produkt des kleinen Einmaleins von $0\times0=0$ bis $9\times9=81$ generieren können. Wir kennen aus der Geschichte der Rechenmaschinen mehrere derartige Mechanismen, manche nur als Entwurf und andere tatsächlich gebaut.

Hoecken stellt in seinem Aufsatz erste Überlegungen für einen Multipliziermechanismus aus verschieblichen Stangen an. Zur Vereinfachung möchte er die Multiplikation durch eine Addition ersetzen und zeigt seine Vorstellungen an

den Eigenschaften eines Rechenschiebers. Da ihm Logarithmen hierfür nicht geeignet erscheinen greift er dazu auf Zahlen zurück, die zu den Logarithmen ähnliche Eigenschaften besitzen, nämlich die zahlentheoretischen Indizes. Die nachfolgende Tabelle hat er für seine Zwecke eingerichtet.

N	I	N	I	N	I	N	I
1	**0**	10	24	25	46	45	37
2	**1**	12	9	27	21	48	11
3	**7**	14	34	28	35	49	66
4	**2**	15	30	30	31	54	22
5	**23**	16	4	32	5	56	36
6	**8**	18	15	35	56	63	47
7	**33**	20	25	36	16	64	6
8	**3**	21	40	40	26	72	17
9	**14**	24	10	42	41	81	28

Sie enthält in den Spalten **N** die Numeri 1 bis 9, welche multipliziert werden sollen, sowie alle Produktzahlen 10 bis 81 des kleinen Einmaleins und in den Spalten **I** einen zu jedem Numerus gehörigen Index. Die Indizes sind so gewählt, dass an Stelle der Multiplikation zweier Numeri die Addition deren Indizes tritt. Man kann beispielsweise rechnen

$3 \times 8 = 24$, oder
vereinfacht mit Indizes $\mathrm{Ind}(3) + \mathrm{Ind}(8) = 7 + 3 = 10$;
zum Index 10 gehört der Numerus 24.

Die Indextabelle oben sowie zwei weitere Tabellen dieser Art in Hoeckens Artikel sind empirisch gefunden und dienen ausschliesslich dem Zweck der vereinfachten Multiplikation. Das Rechnen mit Zwischenwerten ist nicht möglich, ebensowenig das Verlassen des Wertebereichs der Numeri. Soweit bisher bekannt wurde Hoeckens Multipliziermaschine nicht gebaut.
Erwähnt werden muss auch Percy E. Ludgate (1883–1922), Buchhalter in Dublin, der ein ähnliches Systen ganzzahliger Logarithmen für seine analytische Maschine vorgesehen hatte [70]. Er nannte seine Zahlen „ Irish Logarithms“, eine Wahl, die man als humorvoll gefärbten Patriotismus interpretieren kann [69].

Die systematische Bearbeitung des Ansatzes von Hoecken bringt uns zu den diskreten Logarithmen. Diskret bedeutet in diesem Zusammenhang ganzzahlig und ohne Zwischenwerte. Obwohl ihr Anwendungsgebiet nicht bei Rechenhilfen sondern in der Kryptografie liegt, begegnen sie uns ein weiteres Mal im Prinzip des Rechenschiebers von Schumacher.
Johannes Schumacher (1858–1930) beschreibt die Rechenhilfe und deren theoretische Grundlagen in seinem Werk *Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes* aus dem Jahr 1909 [58]. Er verwendet eine Tabelle mit Indizes, die in Bild 17 dargestellt ist.
Sie wird wie bereits zuvor gezeigt für Multiplikationen verwendet.

Mit den Indizes Ind(2) = 1 und Ind(7) = 9 aus der Tabelle lässt sich multiplizieren

$$2 \times 7 = 14 \text{ oder } 1 + 9 = 10;$$
$$7 \times 7 = 49 \text{ oder } 9 + 9 = 18.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	1	69	2	24	70	9	3	38
1	25	13	71	66	10	93	4	30	39	96
2	26	78	14	86	72	48	67	7	11	91
3	94	84	5	82	31	33	40	56	97	35
4	27	45	79	42	15	62	87	58	73	18
5	49	99	68	23	8	37	12	65	92	29
6	95	77	85	47	6	90	83	81	32	55
7	34	44	41	61	57	17	98	22	36	64
8	28	76	46	89	80	54	43	60	16	21
9	63	75	88	53	59	20	74	52	19	51
10	50									

In der ersten Horizontalreihe stehen die Einer, in der ersten Vertikalreihe die Zehner der Potenzreste (Numeri). Der zu einem gegebenen Numerus gehörige Index steht dort, wo sich die Vertikalreihe der Einer und die Horizontalreihe der Zehner des Numerus treffen. Z. B. zur Zahl 67 gehört der Index 81, zur Zahl 15 der Index 93 u. s. f.

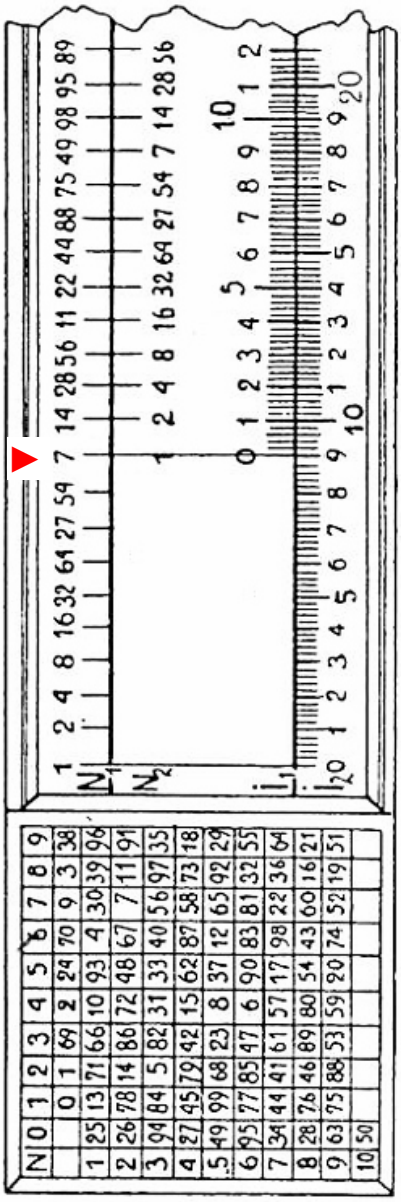
Bild 17: Indextabelle von Schumacher

Die Addition der Indexzahlen lässt sich mechanisch leicht mit zwei gegeneinander verschiebbaren Skalen realisieren. Nach Entwürfen des Erfinders hat die Firma A. W. Faber den Rechenschieber *Modell 366 System Schumacher* herausgebracht [41]. Bild 18 zeigt zwei Rechenschieber, links den von Schumacher und rechts einen logarithmischen üblicher Bauart, beide eingestellt zum Ablesen von Vielfachen der Zahl 7. Die 1 der beweglichen Skala steht gegenüber der 7 auf der festen Skala. Vielfache werden gegenüber des ersten Produktfaktors auf der beweglichen Skala abgelesen.

Der Rechenschieber System Schumacher weist Nachteile gegenüber einem logarithmischen Rechenschieber auf. So sind die Zahlen auf den Skalen nicht dem Wert nach aufsteigend angeordnet, Zwischenwerte kann man nicht ablesen und die Behandlung grösserer Zahlen wird umständlich. Er erhielt von Seiten seiner Zeitgenossen keine positiven Bewertungen[32] und fand nur wenig Verbreitung.

---

[32] Beispielsweise von Schrutka in Monatshefte f. Mathematik, Vol. 20, Nr. 1, Dez. 1909, Lit.berichte S. 55: „...Nur verliert hier einer der Hauptvorteile des logarithmischen Rechenschiebers nämlich seine für ein überaus grosses Anwendungsgebiet ausreichende und doch nicht übergrosse Genauigkeit, völlig seine Bedeutung...“.



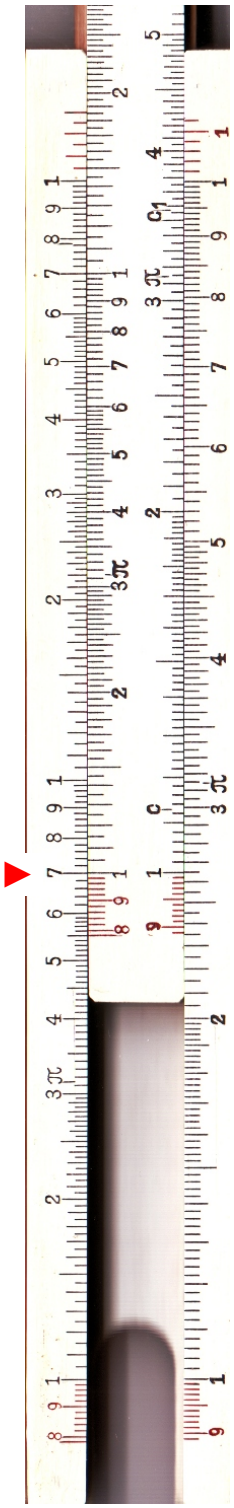


Bild 18: Vielfache von 7 auf Rechenschiebern (RS) eingestellt links:RS Schumacher, Ausschnitt, rechts: ein üblicher logarith. RS

Anhang 1: Ein Rechenbeispiel nach der prosthaphäretischen Methode

Wir multiplizieren

$147{,}809 \times 0{,}6756$

und verwenden dazu die Formel

$$\sin a \times \sin c = \frac{1}{2}\left[\sin\left((90° - a) + c\right) - \sin\left((90° - c) - a\right)\right] \quad (\text{für} \quad a + c < 90°)$$

sowie eine Tafel[33]:

Grad	Sinus
8° 30'	14780.94
39° 0'	62932.04
42° 30'	67559.02
56° 0'	82903.76

147809 ≡ sin 8° 30' (c)
6756 ≡ sin 42° 30' (a)

90° – 42° 30' + 8° 30' = 56° → sin 56° = 8290376
90° – 42° 30' – 8° 30' = 39° → sin 39° = 6293204

Das Komma bleibt zunächst unberücksichtigt.

8290376 – 6293204 = 1997172

1997172 / 2 = 998586

Das Ergebnis muss noch den Potenzen von 10 in den Produktfaktoren angepasst werden.

$147{,}809 \times 0{,}6756 = 99{,}8586$ (richtig 99,8597604).

Multiplizieren kann so einfach sein.

[33] Entnommen aus Anonym (Blaeu ?): *Tabulae sinuum, tangentium et secantium ad radium 10000000.* Amsterdam 1639

Anhang 2: Napier – Eine Logarithmentafel anordnen

Napier gibt in seiner *Constructio* nicht nur umfassende Erläuterungen zu seinen Logarithmen, er beschreibt sogar, wie man die Tafel selbst anfertigt. Der Anfang dieses Abschnitts ist hier wegen seiner Detailtreue aus Bruce [52] vollständig zitiert.

> „59. To put in place a Table of Logarithms.
> Forty five rather long pages are to be prepared, in order that besides the upper and lower margins sixty lines of numbers are to be accommodated. All of the pages are to be divided by 20 equally spaced transverse lines: and all of the distances are divided to take three rows of numbers. From this all of the pages are divided into seven columns by vertical lines, with two lines put in place between the second and third column, and between the fifth and the sixth: between the others only a single line is put in place. The first page at the top left hand side, above the three columns, has this title written: | **0 Degrees** |, and there is written below at the right-hand side under the three final columns thus | **89 Degrees** |. The second page has written on top to the left-hand side thus | **1 Degree** |, and written underneath thus | **87 Degrees** |. And by proceeding thus with the other pages, in order that one less than the quadrant or 89 degrees is always filled up by the addition of the degrees above and below. Then the first column has this title for the individual pages written above: | **Minutes of the above degrees** |. The second column has this title written above: | **Sines of left-hand arcs** |. The third column has this title written above | **Logarithms of the left-hand sines** |. The fourth column has this title written above: | **Differences between the logarithms of the complements** |. The fifth column has this title written below: | **Logarithms of the right-hand arcs** |. The sixth column has this title written below: | **Sines of the right-hand arc**s |. The seventh column has this title written below: | **Minutes of the degrees written below** |. There upon the number of the minutes can be put in place in the first column progressing from 0 to 60...“

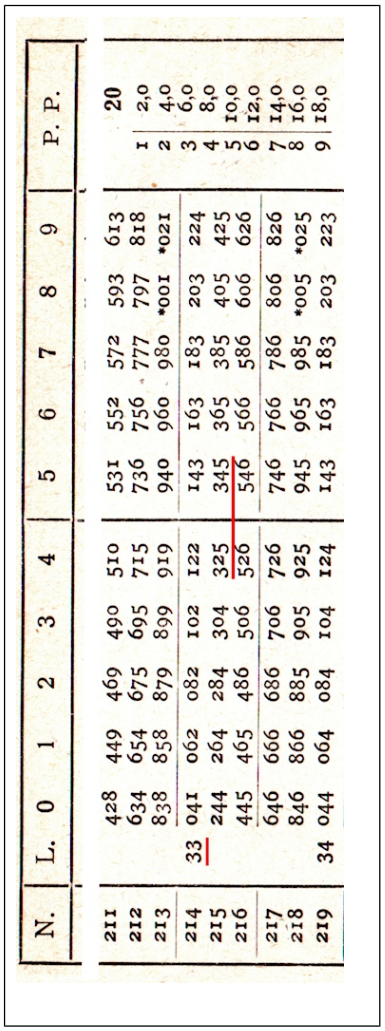
Anhang 3: Rechenbeispiele mit Logarithmen

Es folgen Rechenbeispiele in verschiedenen Logarithmensystemen. Die Beispiele sind einfach gehalten, sie zeigen dennoch die spezifischen Besonderheiten der jeweiligen Systeme. Den Anfang machen die Briggsschen Logarithmen. Sie sind hier mit aufgenommen, weil möglicherweise jüngeren Lesern die Arbeit mit ihnen nicht mehr geläufig ist.

Anh. 3.1: Beispiel Briggs

Wir berechnen $\sqrt[3]{10000}$. Wegen $10000 = 10^4$ gilt $log\ 10^4 = 4$.

$log\ 10^4 / 3 = 4 / 3 = 1{,}33...$



N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.		20
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613		1	2,0
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818		2	4,0
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021		3	6,0
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224		4	8,0
215	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425		5	10,0
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626		6	12,0
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826		7	14,0
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025		8	16,0
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223		9	18,0

Ein Tafelausschnitt[34] wird links gezeigt.

Die Mantisse (Nachkommastellen) $\overline{3333}$ findet sich nicht in der Tafel. Die beiden aufgeführten Werte davor und danach lauten, ohne Berücksichtigung der Zehnerpotenz,
$log\ 2154 = 33325$ und
$log\ 2155 = 33345$.

Wegen $33345 - 33325 = 20$ wird zur Bestimmung der nächsten Ziffer nach 2154 ($log\ 2154x = 33333$) die Proportionaltafel **20** rechts im Bild verwendet. Mit den Differenzen der Logarithmen
$33333 - 33325 = 8$
bestimmt sich die gesuchte Ziffer aus der kleinen Tafel zu 4. Der gesuchte Numerus lautet demnach 21544. Mit der Kennziffer 1 links vom Komma in $1{,}\overline{3333}$ ist das Ergebnis grösser 10^1 und kleiner 10^2. Es lautet letztendlich im Rahmen der möglichen Genauigkeit $\sqrt[3]{10000} = 21{,}544$ (genau 21,5443469...).

Die Vorteile des Logarithmensystems nach Briggs bestehen darin, dass erstens die Logarithmen mit den Numeri steigen und zweitens $log\ 10^n = n$ gilt, was Rechnungen mit Zehnerpotenzen erheblich erleichtert.

---

[34] Entnommen aus Schulz, P.: Fünfstellige logarith. u. trigonometr. Tafeln. 14. Aufl. Bamberg 1937.

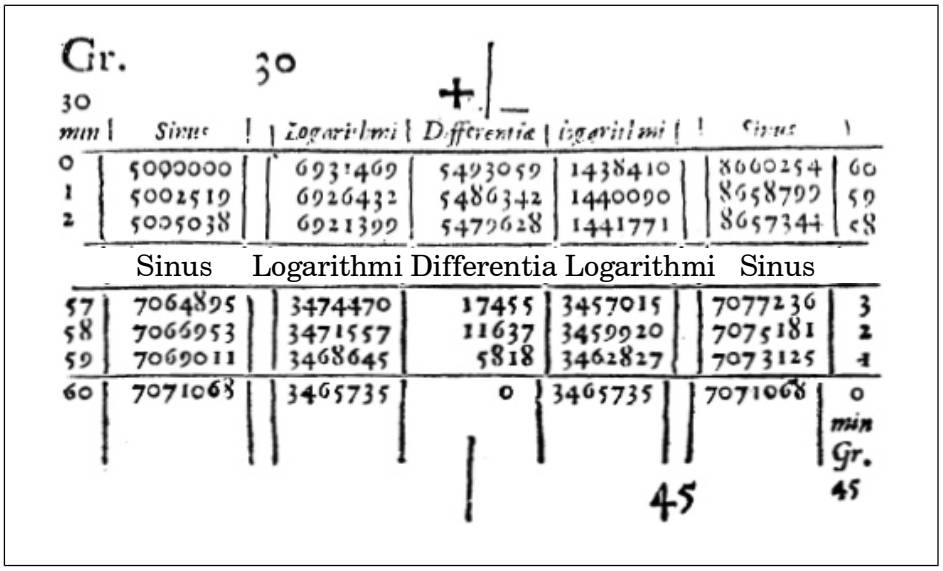
Anh. 3.2: Beispiel Napier

Quelle: *Descriptio*, *problema 1* als Beispiel zu *propos. 1*: für die Logarithmen dreier Zahlen in einer Proportion gilt, dass der Logarithmus der dritten Zahl identisch ist mit zweimal dem Logarithmus der zweiten minus dem Logarithmus der ersten.
Mit den Zahlen des Beispiels:

$$\text{für } \frac{10^7}{7071068} = \frac{7071068}{x} \text{ gilt } log\ x = 2 \times log\ 7071068 - log\ 10^7 .$$

Die unbekannte Zahl x ist gesucht.

Die zugehörigen Tafelausschnitte:
(in Tabelle 30° die Zeilen oben auf der Seite, in Tabelle 45° die Zeilen unten auf der Seite):



Gr. 30 min	Sinus	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	Sinus	
0	5000000	6931469	5493059	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5486342	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5479628	1441771	8657344	58
	Sinus	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	Sinus	
57	7064895	3474470	17455	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	11637	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	5818	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	0	3465735	7071068	0 min Gr. 45

Die Rechnung:

3465735	= *logNep* 7071068	aus Tabelle 45°
+ 3465735	#	
– 0	= *logNep* 10^7	
6931470	= *logNep* 5000000	aus Tabelle 30°

Das Ergebnis: x = 5.000.000.
Das Glied *logNep* 1 tritt in Proportionsrechnungen dieser Art nicht auf.

Ein weiteres Beispiel.
Crüger gibt in seiner *Praxis trigonometriae logarithmicae cum logarithmorum tabulis* eine Tabelle der Napierschen Logarithmen für Zahlen von 1 bis 9999. Ein Ausschnitt ist unten wiedergegeben. Wir berechnen damit 5^3.

Wie oben gezeigt gilt für Logarithmen nach Napier

$$logNep(a^n) = n \times logNep\, a - (n-1)\, logNep\, 1 \quad \text{, hier}$$

$$logNep(5^3) = 3 \times logNep\, 5 - 2 \times logNep\, 1$$

	0	100	200	300	400	500
0	Infinit.	460517	391202	350656	321887	299573
1	921034	459522	390703	350323	1638	9373
2	851719	458537	390207	349991	1389	9174
3	811173	457561	389717	349661	1140	8975
4	782405	456595	389222	349331	320892	298776
5	760090	455638	8733	9003	0645	8578
6	741858	454690	8246	8675	0399	8380
⋮						
25	599146	438203	379424	342651	315825	294694
26	595224	437406	8980	2344	5591	4504
27	591450	436615	8539	2038	5356	4314

760090	*logNep* 5
+ 760090	
+ 760090	
=	
2280270	
– 921034	– *logNep* 1
– 921034	
= 438202	*logNep* 125 interpoliert ergibt sich 125 + 1/797 = 125,00125 (genau 5^3 = 125)

Anh. 3.3: Beispiel Bürgi

Im *Unterricht* gibt Bürgi folgendes Beispiel[35]:
Es soll dividiert werden 154030185 / 205518112

Die notwendigen Werte aus der Tafel:

logBur	Num
43200	154030185
72040	205518112
230270022	10^n
201430	749472389
201440	749547336

43200 – 72040 wird negativ. Bürgi multipliziert daher mit 10, d. h. er addiert als erstes die „ganze rote Zahl“ 230270022 , jedoch nicht 6-stellig sondern 9-stellig für grössere Genauigkeit. Er muss daher die beiden anderen Logarithmen ebenfalls um drei Stellen erweitern.

230270022
+ 43200000
= 273470022
– 72040000
= 201430022

Jetzt muss noch interpoliert werden. Bürgi macht dazu keine Angaben. Er kann nur folgenden Weg gewählt haben:

201430000	749472389
201440000	749547336
Diff. = 10000	74947

201430022 (Ergebnis) – 201430000 (nächster Tafelwert) = 22
749472389 (nächster Tafelwert) + 22 × 74947 / 10000 = 749472554

Da das Ergebnis kleiner als 1 sein muss ergibt sich

$$\frac{154030185}{205518112} = 0{,}749472554 \text{ oder wie Bürgi schreibt } 0\frac{749472554}{1000000000}$$

[35] Lutstorf [47], S. 30 oben.

Es folgt ein Beispiel[36] für eine Rechnung über den Wertebereich der Tafel hinaus. Zu berechnen sei 5^4 .

Die notwendigen Werte aus der Tafel:

logBur	Num
160950	4,99990809
183260	6,24954322
230270	10

logBur 5 = 160950 (eine Näherung, der Einfachheit wegen ohne Interpolation)

160950 × 4 = 643800
Diese „rote Zahl“ (Logarithmus) liegt ausserhalb der Tafel. Wir dividieren solange durch 10 bis ein Wert innerhalb des Bereichs der Tafel erreicht wird.

$$logBur(a/10) = logBur\, a - logBur\, 10$$

643800

– 230270 *logBur* 10
(sechsstellig wie die anderen Logarithmen !)

413530 noch zu gross

– 230270

= 183260 = *logBur* 6,24954322

Das Ergebnis:
5^4 = 100×6,249543 = 624,9543 (richtig 625)

[36] Lutstorf [47], S. 38, vom Autor gewähltes Beispiel für Interpolationen.

Bildnachweis

Bild 12 v. Mackensen, Ludolf:
Die erste Sternwarte Europas mit ihren Instrumenten und Uhren. 400 Jahre Jost Bürgi in Kassel. Ausstellungskatalog hgg. v. Landesmuseum in Kassel. München 1979.
Vom Verfasser mit der fehlenden Farbe rot nachkoloriert

15 oben: The Works of Edmund Gunter, London 1653: The First Book of the Crosse-Staffe, p. 19,
unten: Privatbesitz des Verfassers

16 Lit. [4]

17 Lit. [58]

18 links: Lit [58]
rechts: Foto Verfasser

alle anderen Bilder, sofern nicht Ausschnitte von Digitalisaten originaler historischer Vorlagen, und Zeichnungen sind vom Verfasser erstellt.

Literatur

[1] Archibald, Raymond Clare:
Mathematical Table Makers. Amsterdam, New York 1948

[2] Aubel, Michael:
Michael Stifel. Ein Mathematiker im Zeitalter des Humanismus und der Reformation. Algorismus, H. 72, Augsburg 2008.

[3] Ayoub, Raymond:
What are Napierian Logarithms? In: The American Mathematical Monthly, Bd. 100, Nr. 4, 1993

[4] Babbage, Charles:
Notice respecting some Errors common to many Tables of Logarithms. In: Memoirs of the Astronomical Society of London, Vol. III, pt. I, London 1827, S. 65ff

[5] v. Braunmühl, A.:
Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Leipzig 1903

[6] v. Braunmühl, A.:
Zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie.In: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, H. 9, S. 17–29 (Cantor-Festschrift), Leipzig 1899

[7] Briggs' Arithmetica Logarithmica, translated and annotated by Ian Bruce
http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html

[8] Briggs' Trigonometria Britannica, translated and annotated by Ian Bruce
http://www.17centurymaths.com/contents/tbbriggs.htm

[9] Brodersen, Kai: Die Arithmetica localis des John Napier (1617): Ein lateinischer Grundtext der ‚digitalen Revolution'. In: Rolf Kussl (Hrsg): Präsenz der Antike, Speyer 2006

[10] Bruce, Ian:
Napier's logarithms. In: American Journal of Physics. Vol. 68, No 2, Feb. 2000

[11] Cajori, Florian:
A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching. London 1896 u. ö.

[12] Cajori, Florian:
History of the Exponential and Logarithmic Concepts. In: The American Mathematical Monthly, Vol. 20, No. 1, Jan. 1913

[13] Cajori, Florian:
Notes on the History of Logarithms. In: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 9, 1899, S. 31–39

[14] Campbell-Kelly, Martin:
Charles Babbage's Table of Logarithms (1827). In: Annals of the History of Computing, Vol. 10, No. 3, 1988

[15] Campbell-Kelly, Martin (ed.):
The History of Mathematical Tables. Oxford 2005

[16] Dietrich, Urs u. Girstmair, Kurt: John Napiers Trigonometrie – ein Blick zurück. In: Mathematische Semesterberichte, Vol. 56, No. 2, Sept. 2009

[17] Dubbey, John Michael:
The Mathematical Work of Charles Babbage. Cambridge 1978, 2004

[18] Edwards, C. Henry:
The Historical Development of the Calculus. 3. Aufl. Springer 1994

[19] Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Leipzig 1900. Bd. I, Tl. 2, hier insbes. die Abschnitte ID3: Interpolation und IE: Differenzenrechnung

[20] Faustmann, Gerlinde:
Die Geschichte der Logarithmen. (1995)
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1995%20Band%2023/Faustmann1995.pdf

[21] Faustmann, Gerlinde:
Jurij Vega – the most internationally distributed Logarithm Tables. (2004)
http://www.rechenschieber.org/vega.pdf

[22] Fischer, Joachim:
Looking behind the Slide Rule: How did Napier compute his Logarithms? In: Proceedings of the Third International Meeting of Slide Rule Collectors, Sep. 12, 1977. Faber Castell Castle, Stein/Nürnberg.
dt. Ein Blick vor bzw. hinter den Rechenschieber: Wie konstruierte Napier Logarithmen? (1997)
http://rechnerlexikon.de/files/LogNapier-F.pdf

[23] Gernert, A.:
Bemerkungen über ältere und neuere mathematische Tafeln. In: Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, Heft VI, S. 407–443, Wien 1863. Zitiert in: Archiv der Mathematik und Physik 1864, Literarischer Bericht CLXI.

[24] Gibson, George A.:
Napier's Logarithms and the change to Briggs's Logarithms. In: Knott, Cargill Gilston (ed.): Napier Tercentenary Memorial Volume. London 1915

[25] Glaisher, James Whitbread Lee:
On Errors in Vlacq's (often called Briggs' or Neper's) Table of Ten-figure Logarithms of Numbers.
In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 32, May 1872 und Vol. 33, June 1873

[26] Glaisher, James Whitbread Lee:
On the progress to Accuracy of Logarithmic Tables.
In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 33, March 1873

[27] Glaisher, James Whitbread Lee:
Report of the Committee ... on Mathematical Tables.
In: Report of the forty-third meeting of the British Association for the advancement of science. London 1874

[28] Grattan-Guinness, Ivor:
Convolutions in French Mathematics, 1800–1840. Vol. 1, Birkhauser 1990

[29] Grattan-Guinness, Ivor:
Work for the Hairdressers, The Production of de Prony's Logarithmic and Trigonometric Tables. In: Annals of the History of Computing, IEEE, Vol. 12, Iss. 3 (July–Sept. 1990)

[30] Gronau, Detlef:
Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik. Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz 2009
http://www.kfunigraz.ac.at/~gronau/Gm.pdf

[31] Gutzmer, A.:
Zum Jubiläum der Logarithmen. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 23, S. 235–248, 1914.
http://www.digizeitschriften.de/index.php?id=loader&tx_jkDigiTools_pi1[IDDOC]=514873

[32] Halley, Edmond: A most compendious and facile Method for constructing the Logarithms... In: Philosophical transactions, 1695, Vol. 19, No. 215–235, 58–67; auch Vol. IV. from 1694 to 1702, London, 1809

[33] Hammer, Franz:
Nachbericht zu den logarithmischen Schriften von Johannes Kepler. In: Johannes Kepler, Ges. Werke Bd. 9: Mathemat. Schriften. München 1960, S. 461–483.

[34] Havil, Julian:
Gamma, Eulers Konstante, Primzahlstrände... Springer 2007

[35] Henderson, James:
Bibliotheca Tabularum Mathematicarum, pt. I – Logarithmic Tables. Cambridge University, London, 1926

[36] Hobson, Ernest William:
John Napier and the invention of logarithms, 1614; a lecture (1914). Cambridge : University Press.
http://www.archive.org/details/johnNapierinvent00hobsiala

[37] Hoecken, Karl:
Die Rechenmaschinen von Pascal bis zur Gegenwart, unter besonderer Berücksichtigung der Multiplikationsmechanismen. In: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 13. Jahrgang., 106. Sitzung, 26. Februar 1913, S. 8–29 (beigebunden zu: Archiv der Mathematik und Physik, 22. Bd., 1. H., 1913)
http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Historische_Texte

[38] Holland, Peter:
Archimedes, seine Idee der Logarithmen.
http://www.rechenschieber.org/Archimedes.pdf

[39] Hutton, Charles:
Mathematical Tables. London 1811

[40] Ivory, James:
An Account or a Table of Logarithms, published by John Speidell... In: Maseres, Francis: Scriptores logarithmici. Vol. 6, London 1807

[41] von Jezierski, Dieter et al.:
A.W. Faber Model 366 - System Schumacher. A Very Unusual Slide Rule. In: Journal of the Oughtred Society, Vol. 13, No.2, 2004, pp 10–17

[42] Knott, Cargill Gilston (ed.):
Napier Tercentenary Memorial Volume. London 1915

[43] Kühn, Klaus:
Die Prosthaphärese und Johannes Werner. (2008)
http://www.rechenschieber.org/Pros_komplett.pdf

[44] Lexa, Michael A.:
Remembering John Napier and his Logarithms (200)
http://www.ece.rice.edu/~amlexa/supportingdocs/Napier_mlexa2000.pdf

[45] Lindgren, Michael:
Glory and Failure. The Difference Engines of Johann Müller, Charles Babbage and Georg Edvard Scheutz. Translated by Dr. Craig G. McKay. The M.I.T. Press, 1990

[46] Lüneburg, Heinz:
Von Zahlen und Grössen. Bd. 1, Basel 2008

[47] Lutstorf, Heinz u. Walter, Max:
Jost Bürgis Progress Tabulen, nachgerechnet und kommentiert. In: Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Nr. 28. Zürich 1992.
http://e-collection.ethbib.ethz.ch/view/eth:22272

[48] MacDonald, William Rae:
The construction of the wonderful canon of logarithms, by John Napier, Baron of Merchiston; translated from the Latin into English with notes and a catalogue of the various editions of Napier's works. London 1889

[49] Matzka, Wilhelm:
Beiträge zur höheren Lehre der Logarithmen. In: Archiv der Mathematik und Physik, 1850

[50] Matzka, Wilhelm:
Ein kritischer Nachtrag zur Geschichte der Erfindung der Logarithmen. In: Archiv der Mathematik und Physik 1860

[51] Müller, Conrad:
John Napier, Laird of Merchiston, und die Entdeckungsgeschichte seiner Logarithmen. In: Die Naturwissenschaften, 2. Jg., H. 28 (10. Juli 1914)
http://www.springerlink.com/content/v28v77841j741kgn/?p=a40e57db5e864d6a9649e41bf7f96dc2&pi=0

[52] (John) Napier : Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio... & Constructio..., translated and annotated by Ian Bruce
http://www.17centurymaths.com/contents/Napiercontents.html

[53] van Poelje, Otto E.: Adriaen Vlacq and Ezechiel de Decker: Dutch Contributors to the Early Tables of Briggsian Logarithms. In: Journal of the Oughtred Society, Vol. 14, No. 1, 2005

[54] (Baron) de Prony's
Description of the Construction of Mathematical Tables. Science Museum Library Babbage Archives Document BAB [U21/1]

[55] Randell, Brian:
From Analytical Engine to Elecronic Digital Computer: The Contributions of Ludgate, Torres and Bush. In: Annals of the History of Computing, Vol. 4, No. 4, Oct 1982
http://www.cs.ncl.ac.uk/publications/articles/papers/398.pdf

[56] Robinson, Tim:
Difference Engines
http://meccano.us/difference_engines/

[57] Schoberleitner, Franz:
Johannes Keplers Beiträge zur Mathematik. In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Bd. 35 (2003).
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2003%20Band%2035/VortragSchoberleitner.pdf

[58] Schumacher, Johannes:
Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes. München 1909

[59] Sonar, Thomas:
Die Berechnung der Logarithmentafeln durch Napier und Briggs. (27. Sept. 2004)
http://www.rechenschieber.org/sonar.pdf

[60] Stifel, Michael:
Arithmetica integra. Nürnberg 1544. Dt. Michael Stifel: Vollständiger Lehrgang der Arithmetik: Deutsche Übersetzung von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger, 2007

[61] Thoren, Victor E.: Prosthaphaeresis Revisited. In: Historia Mathematica 15/1 (1988)

[62] Tropfke, Johannes:
Geschichte der Elementar-Mathematik. Bd. 2, Leipzig 1903

[63] Villarreal-Calderon, Rafael:
Chopping Logs: A Look at the History and Uses of Logarithms. In: The Montana Mathematics Enthusiast, Vol. 5, Nr. 2 u. 3, S. 337–344

[64] Voellmy, Erwin:
Jost Bürgi und die Logarithmen. In: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift), Vol.5, 1948
http://retro.seals.ch/digbib/de/voltoc?rid=emb-001:1948:3:4:5::13

[65] Weiss, Stephan:
Die Arithmetica Localis von John Napier. (2008)
http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen

[66] Weiss, Stephan:
Die Rechenstäbe von Neper, ihre Varianten und Nachfolger (2007)
http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen

[67] Wyman, Thomas:
The First Tables of Logarithms – A Brief Chronology. In: Journal of the Oughtred Society, Vol. 18, No. 2, 2009, pp 33–39

[68] Young, John Radford:
An elementary essay on the computation of logarithms. London 1830

[69] Boys; C. V.:
A new analytical engine. In: Nature, July 1, 1909

[70] Percy E. Ludgate:
On a poroposed analytical machine. From the Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society 1909.
http://www.fano.co.uk/ludgate/paper

[71] Caramuel Lobkowitz, Juan:
Mathesis biceps vetus et nova. 2 Bde., 1670

[72] Carlslaw, H. S.:
Napier's Logarithms: the Development of his Theory. In: The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Vol. 32–6th ser., July–Dec. 1916

[73] Cajori, Florian:
The word "logarithm" used before the time of Napier. In: Bulletin of the American Math. Society 36 (1930), S. 367

[74] Gronau, Detlef:
The logarithms — From calculation to functional equations. In: II. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Neuhofen an der Ybbs, 22.–28. Oktober 1989. (Auch in: Notices of the South African Mathematical Society, Vol. 28, No. 1, April 1996, pp. 60–66).

[75] Krauss, Stefan:
Die Entdeckungsgeschichte und die Ausnahmestellung einer besonderen Zahl: e=2,718... In: The Teaching of Mathematics, 1999, Vol. II, 2, S. 105–118
http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/3/tm223.pdf

[76] Kühn, Klaus:
Willioam Oughtred und die Logarithmen (2006)
http://rechnerlexikon.de/logarith/KKuehn_William_Oughtred_und_die_Logarithmen_IM2006.pdf

[77] Mautz, Otto:
Zur Basisbestimmung der Napierschen und Bürgischen Logarithmen (Beilage zu den Jahresberichten des Gymnasiums, der Realschule und der Töchterschule in Basel), 1919

[78] Roegel, Denis:
Bürgi's Progress Tabulen (1620): logarithmic tables without logarithms, (2010)
http://locomat.loria.fr/locomat/reconstructed.html#triglog

[79] Roegel, Denis:
Napier's ideal construction of the logarithms, (2010)
http://locomat.loria.fr/locomat/reconstructed.html#triglog

[80] Smith, D. E.:
The Law of Exponents in the Works of the Sixteens Century. In: Knott, Cargill Gilston (ed.): Napier Tercentenary Memorial Volume. London 1915

März 2010–Jan. 2013
http://www.mechrech.info
□