Stephan Weiss

Die Arithmetica Localis von John Napier

Einleitung

Den schottischen Mathematiker John Napier[1] (1550 – 1617) kennen wir überwiegend im Zusammenhang mit der Erfindung der Logarithmentafel und mit den Rechenstäbchen zur Vereinfachung des Multiplizierens. Wie er selbst in seinem Werk *Rabdologia* aus dem Jahr 1617 (Lit. 6 und 7) bekundet stand für ihn stets das Ziel der Erleichterung des Zahlenrechnens im Vordergrund. Aus diesem Bemühen entwickelte er zwei weitere weniger bekannte Rechenhilfen, das *Promptuarium Multiplicationis* und die *Arithmetica Localis.* In der Vorbemerkung schreibt er:

> „Während ich (soweit es mir in der Freizeit erlaubt war) bei der Erforschung dieser kurzen Rechenmethoden einmal Mühe aufwandte und erkundete, auf welche Arten die Arbeit und Last des Rechnens aufgehoben werden könnte, stieß ich (außer auf die Logarithmen, die Rabdologia, das Promptuarium für die Multiplikation u.a.) auf eine bestimmte Brett-Arithmetik, die man (da sie alle schwereren Berechnungen der gewöhnlichen Arithmetik auf einem Rechenstab oder einem Schachbrett durchfuhrt) mit Recht als Spiel, nicht als Arbeit bezeichnen muss: Durch sie nämlich geschieht die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, ja sogar das Wurzelziehen allein durch die Bewegung von Rechensteinen hierhin und dorthin. Eine einzige geringe Verzögerung beim Berechnen begegnet freilich dadurch, dass sich deren Zahlen allerdings von den gewöhnlichen Zahlen insofern unterscheiden, als zuerst die Umformung der gewöhnlichen Zahlen in diese und zuletzt deren Umformung in gewöhnliche Zahlen erforderlich ist — was beides hinreichend einfach ist, aber mitten im Fortschritt der Berechnungen durch die Einfachheit und Sicherheit kaum einer kurzen Arithmetik-Methode nachsteht. Diese also weder mit Schweigen zu begraben noch für sich (da sie kurz ist) einzeln herauszugeben, sondern sie dieser unserer Rabdologia nach dem oben genannten Promptuarium zum Nutzen der Studierenden und zur Beurteilung durch die Gelehrten anzufügen, schien gut.“[2]

1 Für seinen Namen existierten mehrere Schreibweisen, umgangssprachlich hat man sich auf Napier geeinigt. Gesichert ist nur die latinisierte Form Neper.

2 Zitiert aus Brodersen (Lit. 1), der sowohl den lateinischen Originaltext als auch eine deutsche Übersetzung gibt.

Mit Ausnahme der Logarithmen sind alle Rechenhilfen in seinem Werk *Rabdologia* beschrieben und im Titel[3] genannt (s. Bild 1).

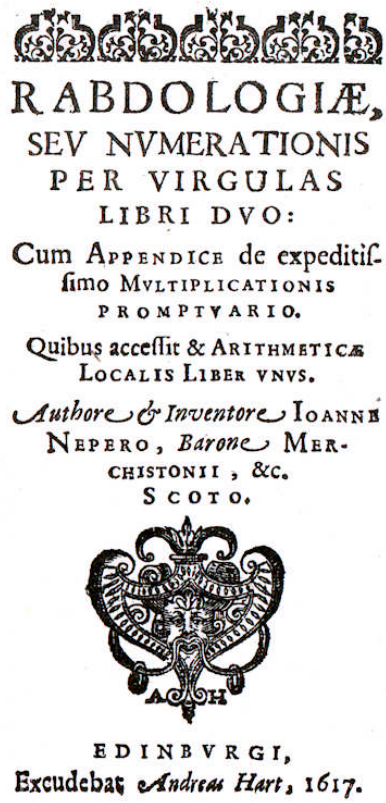

RABDOLOGIÆ,
SEV NVMERATIONIS
PER VIRGULAS
LIBRI DVO:
Cum APPENDICE de expeditiſſimo MVLTIPLICATIONIS PROMPTVARIO.
Quibus acceſſit & ARITHMETICÆ LOCALIS LIBER VNVS.
Authore & Inventore IOANNE NEPERO, Barone MERCHISTONII, &c.
SCOTO.
EDINBVRGI,
Excudebat Andreas Hart, 1617.

Bild 1: Das Titelblatt der Rabdologia

In den ersten beiden Beispielen für die Umrechnung von Zahlen in der *Arithmetica Localis* verwendet Napier die Zahl *1611 ANNI DOMINI.* Daraus lässt sich ableiten, dass Napier dieses Verfahren schon im Jahr 1611 niedergeschrieben hat. *Arithmetica Localis* ist ein lateinischer Begriff, er bedeutet frei übersetzt 'Arithmetik des Örtlichen', 'ortsorientierte Arithmetik' oder 'positionelle Arithmetik', weil mit Steinen in den Feldern auf einem Brett gerechnet wird.[4] Wir verwenden weiterhin die originale Benennung.

Mit dem Studium von Napiers *Arithmetica Localis* kann der Leser mehr gewinnen als nur die Kenntnis über eine von vielen historischen Rechenhilfen. Der Text und

3 Das Werk hat seinen Kurztitel vom ersten darin beschriebenen Rechenhilfsmittel, den Stäbchen zum Multiplizieren. Die Rechenstäbchen sind ausführlich bei Weiss (Lit. 9), das *Promptuarium M. bei Hawkins (*Lit. 3) erläutert.

4 Die Übersetzung 'Stellen-Arithmetik' halten wir für weniger treffend, weil sie die Vorstellung von einem Stellenwertsystem aufkommen lässt, und das ist die *Arithmetica Localis* gerade nicht.

das Verfahren vermitteln zudem einen Eindruck von der Genialität und vom Ideenreichtum des Erfinders. Nur sein besonders kreatives Vorstellungsvermögen kann ihn auf die Zusammenhänge zwischen Rechenalgorithmen und Transformationen grafischer Darstellungen von Zahlen aus einem anderen als dem dezimalen Stellenwertsystem gebracht haben. Vorläufer dieser Rechenhilfe sind nicht bekannt.

Seine Beschreibung des Verfahrens ist klar gegliedert. In jedem Abschnitt kommen nach einer kurzen Einführung Definitionen oder kurze Erklärungen der verwendeten Begriffe und darauf folgen Rechenbeispiele. Wie zu dieser Zeit üblich beschränkt sich die Methodik auf ein rezeptartiges Vorführen. Erläuterungen des mathematischen Hintergrundes werden von ihm nicht gegeben.

Die Darstellung und Umrechnung der Zahlen

Für die Darstellung der Zahlen verwendet Napier kein dezimales Stellenwertsystem, wie wir es gewohnt sind, sondern ein Additionssystem[5] auf der Basis 2. Mit dieser Wahl gelingt ihm eine grafische Darstellung der Zahlen mittels Steinen auf einem Brett einschliesslich des Rechnens mit ihnen in einer völlig neuen und relativ einfachen Handhabung. Er nimmt jedoch in Kauf, dass vor und nach einer Rechnung Zahlen von einem System in das andere umgerechnet werden müssen.

q	32768	2^{15}
p	16384	2^{14}
o	8192	2^{13}
n	4096	2^{12}
m	2048	2^{11}
l	1024	2^{10}
k	512	2^{9}
i	256	2^{8}
h	128	2^{7}
g	64	2^{6}
f	32	2^{5}
e	16	2^{4}
d	8	2^{3}
c	4	2^{2}
b	2	2^{1}
a	1	2^{0}

Napier ordnet jeder Zweierpotenz ein eigenes Zeichen zu, beginnend mit dem Buchstaben *a* für 2^0. Das Schema links zeigt die ersten Zuordnungen, die nach oben nicht begrenzt sein müssen. Jede Zahl kann notiert werden als eine Aufeinanderfolge der Summanden bzw. Zweierpotenzen,[6] aus denen sie zusammengesetzt ist. So sind *aeg* und *gea* mit $2^0 + 2^4 + 2^6 = 2^6 + 2^4 + 2^0$ dem Wert nach identisch. Ein Zeichen für Null gibt es nicht, weil es nicht erforderlich ist. Obwohl die Reihenfolge der Zeichen in einer Zahl keinen Einfluss auf ihren Wert hat bevorzugt Napier eine in der Ordnung aufsteigende Zeichenfolge.

Napier rechnet nicht mit negativen Zahlen. Er schreibt auch keine Brüche, weil er wie bei den Rechenstäbchen in der ge-

5 Ein Stellenwertsystem zur Basis 2 mit den Ziffern 0 und 1 dokumentierte erstmals Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) in seiner Binären Arithmetik von 1703, veröffentlicht im Jahr 1705 (Lit. 8). In diesem System gilt $10101_{(2)} = 2^4 + 0{\cdot}2^3 + 2^2 + 0{\cdot}2^1 + 2^0$. Napier hätte diese Zahl als *ace* geschrieben.

6 Es ist lange bekannt, dass jede natürliche Zahl als Summe unterschiedlicher Potenzen von 2

gebenen Aufgabe durch Multiplizieren mit Potenzen von 10 Brüche vermeidet. Ein anderer Schwachpunkt theoretischer Natur sei hier genannt. Das System hat eine obere Grenze. Wenn nämlich der Zeichenvorrat begrenzt ist, gibt es auch eine grösste darstellbare Zahl.

Die schriftliche Notation der Zahlen wie oben gezeigt bleibt eine Ausnahme. Die Vorteile des Systems kommen zum Tragen, wenn die Zweierpotenzen mittels Marken oder Spielsteinen auf einer Skala markiert werden. Dies kann auf einem Stab ähnlich der Tabelle oben oder auf einem Brett mit Einteilung in Quadrate geschehen. Wir kommen bei den Rechenbeispielen weiter unten darauf zurück.

Für die Umrechnung einer Zahl vom Zehner- in sein Zweiersystem zeigt Napier drei Verfahren. Beim einfacheren Subtraktionsverfahren wird von der Ausgangszahl die nächst kleinere Potenzzahl abgezogen, man findet sie leicht auf dem Stab, die dann am Stab markiert wird. Der Vorgang wiederholt sich für das Ergebnis der Subtraktionen bis dieses Null wird. Die nachfolgende Darstellung in Bild 2 zeigt das Verfahren für die Zahl 1611.

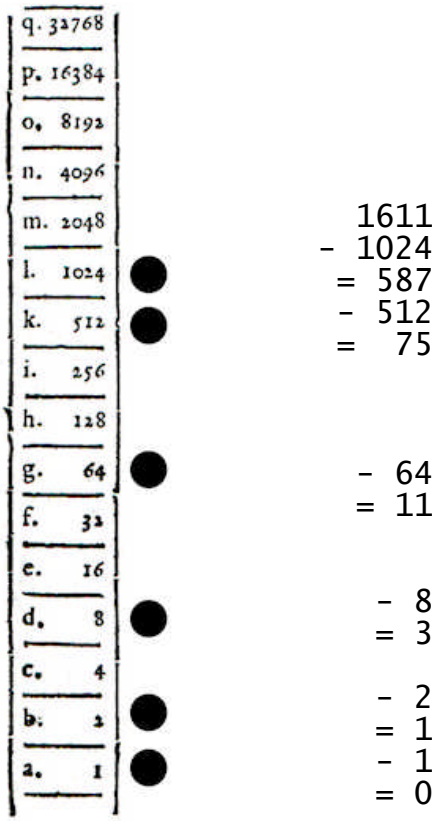


Bild 2: Die Zahl 1611

dargestellt werden kann. Napier spricht noch nicht von Potenzen.

Die obige Darstellung macht deutlich, warum Napier die Zahlen seines Systems *numeri locales,* Ortszahlen, nennt.
An Stelle des Stabes kann man auch eine Kante des Rechenbretts, das weiter unten beschrieben ist, verwenden.
Ein zweites Verfahren der Umrechnung vom Zehner- in das Zweiersystem verwendet die fortgesetzte Division durch 2 und ist schwieriger in der Ausführung.

Die Umrechnung vom Zweier- in das Zehnersystem führt man bei schriftlicher Notation einfach durch Addieren der Werte der Zeichen aus. Napier gibt auch hierzu ein zweites Verfahren. Es ist umständlicher in der Ausführung und arbeitet mit der Verdopplung. Noch zwei Verfahren für die Umrechnungen gibt Napier nach der Erklärung der Operationen Kürzen und Erweitern.

Addition und Subtraktion

Bevor wir zur Ausführung von Rechenoperationen kommen müssen noch zwei kleine aber wichtige Zwischenschritte angesprochen werden. Es sind dies das Kürzen und das Erweitern. Beide Operationen nutzen die Beziehung $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Für die schriftliche Notation ergeben sich daraus beispielsweise mit Hilfe der Beziehungen *ff = g* oder *ee = f* die Identitäten von *aeg = aeff = aeeeee*.

Marco Locatello (Lit. 4) hat die *Rabdologia* in die italienische Sprache übertragen. Das Ergebnis der schriftlich ausgeführten Addition
BCFGH + ACDEH = ABCCDEFGHH kürzt er mit *CC=D, DD=E, EE=F, FF=G, GG=H, HH=I* zu *ABHI* ab:

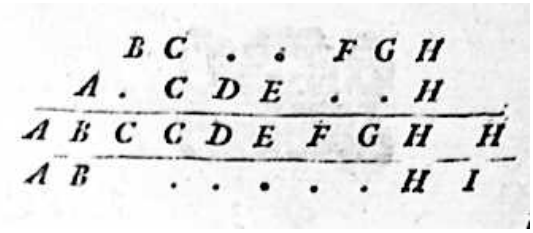


Bild 3: Eine schriftliche Addition bei Locatello

Napier gibt die gleiche Aufgabe, schreibt aber die Summanden nebeneinander.
Hier sei nochmals der Hinweis angebracht, dass es sich trotz der geordneten Notation, die Locatello nur der Übersicht wegen wählt, nicht um ein Stellenwertsystem handelt.

Kürzen und Erweitern sind auch anwendbar für die Darstellung einer Zahl auf dem Stab oder auf dem Brett. Zwei Steine der gleichen Ordnung, d, h, mit dem gleichen

Exponenten von 2, können zu einem Stein auf der nächst höheren Ordnung gekürzt, also zusammengefasst werden. Ebenso kann ein Stein zu zwei Steinen auf der nächst niedrigen Ordnung erweitert werden.

Mit Rückgriff auf Kürzen und Erweitern sind Additionen und Subtraktionen sowohl schriftlich als auch auf Stab oder Brett nicht mehr schwierig. Napier, der fast immer für ein Problem mehrere Lösungen bietet, gibt zusätzlich noch eine Umrechnungstabelle. Sie enthält in den Spalten von links nach rechts untereinander die Zahlenwerte 1 – 9, 10 – 90 und so weiter in seiner Schreibweise. Mit dieser Tabelle und gestützt auf Addition und Subtraktion kann er Umrechnungen von Zahlen noch auf einem anderen Weg als oben gezeigt vornehmen.

Tabula Re-

	1	10	100	1000
1	a	bd	c f g	dfghik
2	b	c e	d g h	eghikl
3	ab	bcde	cdfi	defhikm
4	c	d f	e h i	fhiklm
5	ac	bef	cefghi	dhikn
6	bc	cdef	degk	efgikln
7	abc	bcg	cdefhk	degikmn
8	d	eg	fik	giklmn
9	ad	bdeg	chik	dfiko

ductionis.

10000	100000	1000000
eiklo	fhklqr	gkprstv
fklmp	gilmrs	
efilnop	fghiknqt	
glmnq	hkmnst	
egikpq	fioqrst	
fgk mopq	ghiklorv	
efginr	fgklmoqsv	
hmnor	ilnotv	
chiklmnpr	fhikmnoqrtv	

Bild 4: Die Umrechnungstabelle bei Napier

Die Zahl 3783 zerlegt er in ihre Summanden,

3783 = 3000 + 700 + 80 + 3,

liest für jeden Summanden die Zahl in seiner Schreibweise aus der Tabelle ab und addiert diese

defhikm + *cdefhk* + *eg* + *ab* =
abcddeeeffhhikkm = (gekürzt mit *dd=e, ee=f, ff=g* usw.)
abcghklm

Das Umrechnen in Dezimalzahlen mit Hilfe der Tabelle wird ausgeführt, indem die Ausgangszahl bzw. der Rest wiederholt nach Bedarf erweitert und dann die jeweils grösste Zahl aus der Tabelle abgezogen wird.
Gesucht ist die dezimale Schreibweise von *abcghklm.*

abcghklm = *abcddefgghhikkm*
– *defhikm* *(– 3000)*
= *abcdgghk* = *abcdeefghk*
– *cdefhk* *(– 700)*
= *abeg*
– *eg* *(– 80)*
= *ab*
– *ab* *(– 3)*
= *0*

Ein einfacher Weg bestünde allerdings darin, die Werte der einzelnen Zeichen zusammenzuzählen.

Das Rechenbrett

Für Multiplikationen, Divisionen und die Berechnung der Quadratwurzel leistet ein Rechenbrett bessere Dienste als eine Leiste oder die schriftliche Ausführung. Napier zeigt ein solches, das von einer Ecke aus gehend nach beiden Seiten wie der Stab mit den aufsteigenden Potenzen von 2 beschriftet ist, die bis 2^{46} = 70.368.744.177.664 führen (Bild 5).

Weil Buchstaben des lateinischen Alphabets nicht ausreichen, verwendet Napier auch solche aus dem griechischen. Selbstverständlich kann das Brett auch mit einem kleineren Wertebereich gezeichnet werden.
Innen ist das Brett wie ein Schachbrett in kleine Quadrate eingeteilt. Bei Napier sind die Quadrate noch gleich ausgeführt, Locatello bevorzugt zwei wechselnde Grundfarben (Bild 6). Mit dieser Abänderung wird die Übersicht bei diagonalen Bewegungen der Steine erleichtert.
Die Orientierung des Bretts hat keinen Einfluss auf die Arbeit mit ihm, es kann mit der Ecke des Ursprungs zum Benutzer zeigen oder mit der Seitenkante parallel zu ihm liegen.

Napier sieht eine grosse Ähnlichkeit der *Arithmetica Localis* mit dem Schachspiel. Sie geht über die Ausgestaltung des Brettes hinaus. Zwei wichtige Züge der Rechensteine vergleicht er mit den Zügen von Turm und Läufer. Das Rechnen mit den Steinen auf dem Brett bezeichnet er in der Vorbemerkung sogar als Spiel.

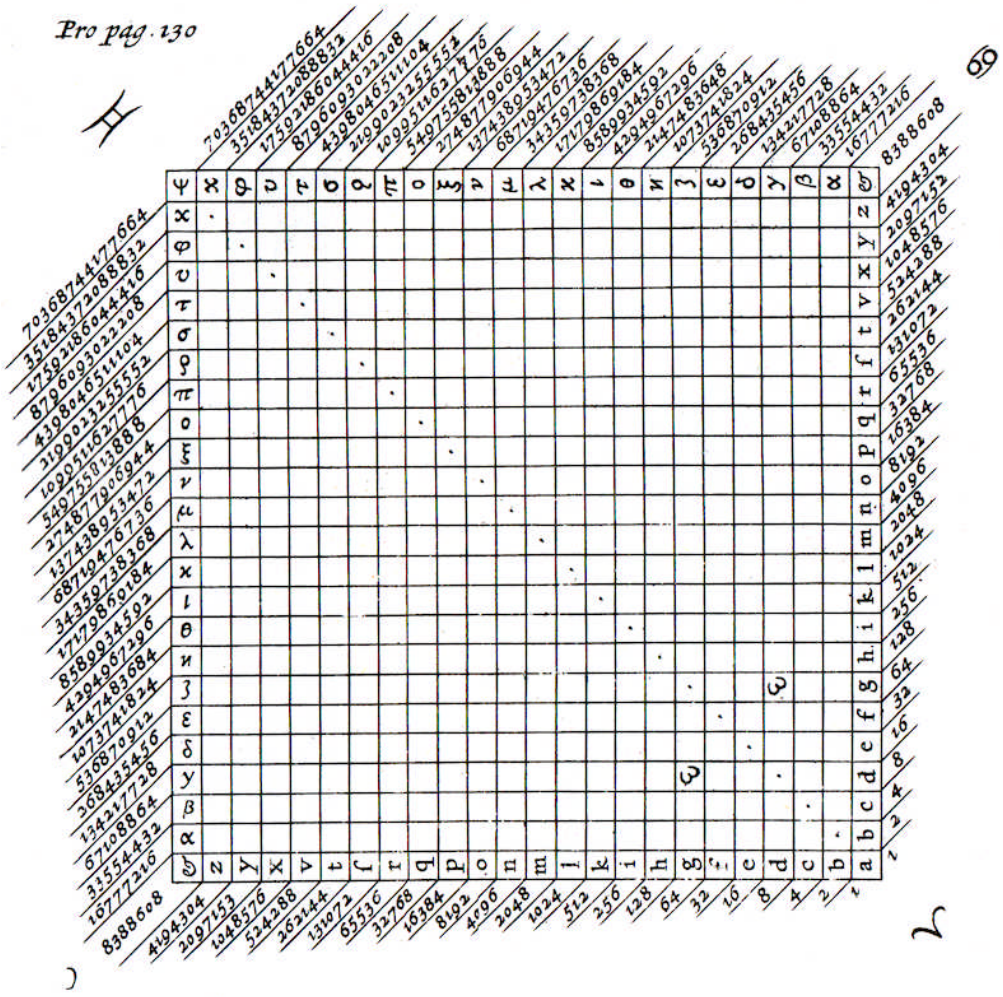


Bild 5: Das grosse Rechenbrett bei Napier

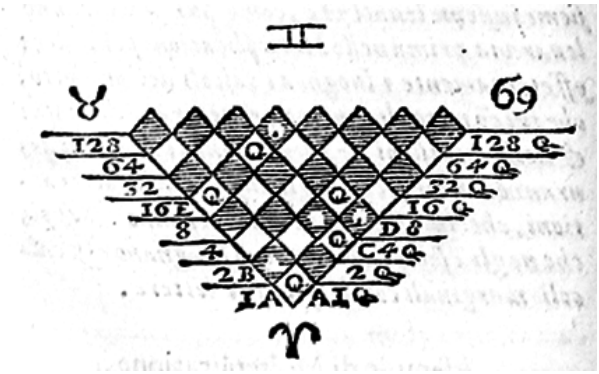


Bild 6: Ein Ausschnitt des Rechenbretts bei Locatello

Die Position eines Steines bestimmt seinen Wert. Wie in Bild 7 für 64 = 16·4 gezeigt ist dieser gleich dem Produkt aus den beiden Zahlen am Rand. Er kann direkt am Rand abgelesen werden, wenn man vom Stein aus diagonal nach einer der beiden Seiten blickt.

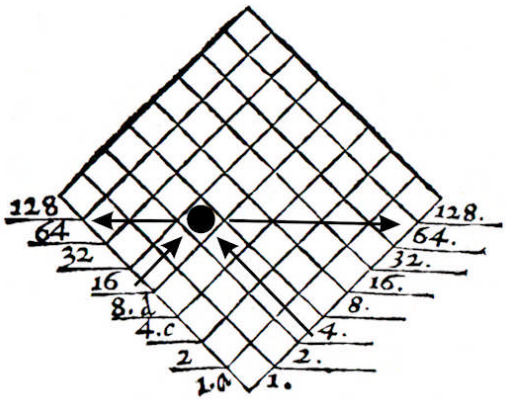
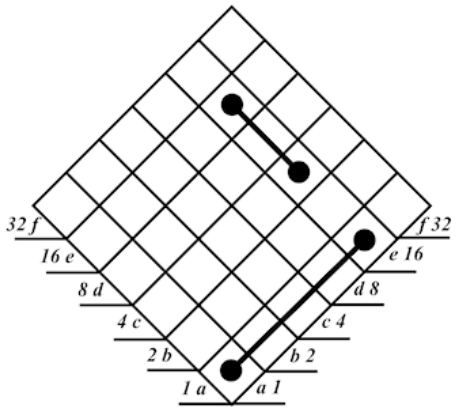
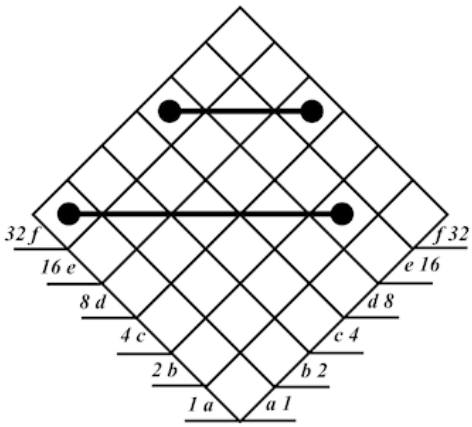


Bild 7: Der Wert des Steins 16·4 = 64

Es gibt zwei wichtige Bewegungen der Steine auf dem Brett: parallel zu den Seitenkanten und in diagonaler Richtung durch die Felder. Napier beschreibt sie zunächst und weist dann zur Verdeutlichung auf die Züge von Turm (nächstes Bild links) und Läufer (nächstes Bild rechts) im Schachspiel hin.

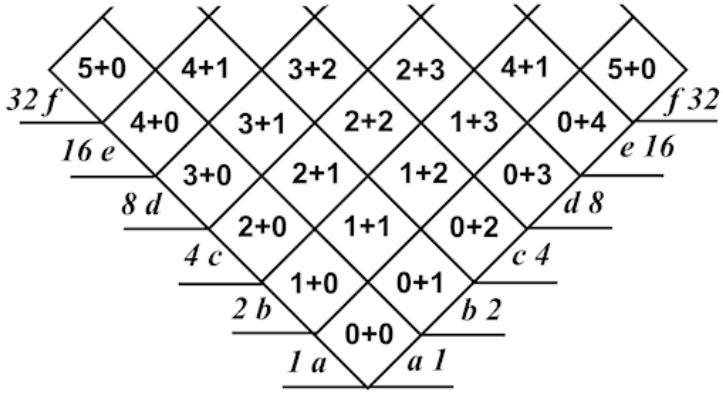




Daraus lässt sich folgern, dass er bei seinen Lesern mit zumindest mathematischen Grundkenntnissen auch die Kenntnis des Schachspiels vermutet.

Rechnen auf dem Brett geschieht durch Verändern der Steinpositionen nach vorgegebenen einfachen Regeln. Genau darin liegt die Vereinfachung, die Napier anstrebt.

Schliesslich geht Napier noch darauf ein, welchen Einfluss die Bewegung eines Rechensteines auf dessen Wert hat. Man kann sich diese Zusammenhänge leicht vor Augen führen, wenn man ein Brett zeichnet und in jedes Quadrat nicht die Produkte in Potenzen von 2 einträgt sondern nur deren Exponenten.



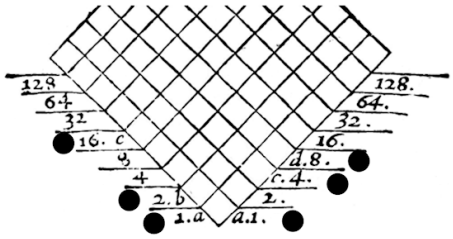
Die wichtigsten Regeln für die Änderung eines Wertes sind:

- Die Bewegung eines Steines parallel zum Rand verdoppelt seinen Wert, wenn sie vom Ursprung der Skalen wegführt, sie halbiert seinen Wert, wenn sie in Richtung zum Ursprung hinführt.
- Entlang einer Diagonalen, die unmittelbar vom Ursprung wegführt oder parallel dazu liegt (im Bild oben senkrecht) wird der Wert des Steines vervierfacht. Er wird auf ein Viertel verkleinert, wenn eine Diagonale direkt zum Ursprung hin führt oder parallel dazu liegt.
- Entlang von Diagonalen im rechten Winkel dazu (im Bild oben waagerecht) bleibt der Wert des Steines unverändert. Geht man von einem Stein aus in dieser Richtung zu einem der Ränder hin lässt sich dort sofort dessen Wert ablesen.

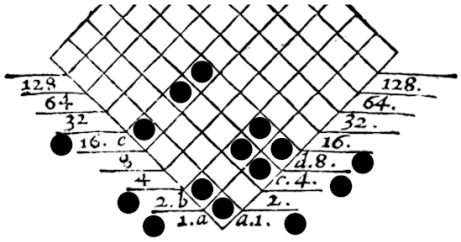
Nachdem Napier alle Eigenschaften des Zahlensystems sowie die Regeln des Rechnens mit Steinen erläutert hat führt er Beispielrechnungen auf dem Brett vor, die wir hier in Auswahl übernehmen. Am Ende einer Beispielrechnung gehen wir kurz auf den mathematischen Hintergrund ein. Die Ausführung der Rechnungen scheint zunächst schwierig oder umständlich zu sein. Erst nach einer gewissen Übung stellt sich eine Fertigkeit ein, die den Wert der Arbeitserleichterung besser zu beurteilen erlaubt.

Die Multiplikation

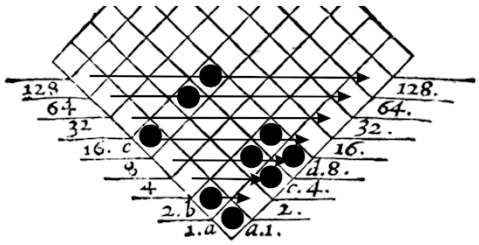
Das erste Beispiel der Multiplikation bei Napier lautet 19·13.



Zunächst werden die beiden Faktoren 19 = *abe* und 13 = *acd* an den Rändern ausserhalb des Brettes mit Steinen oder auf andere Art markiert.



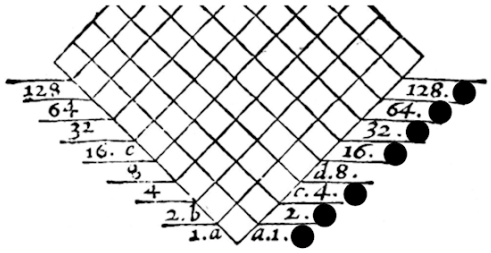
Sodann wird die Figur des einen Faktors wie sie am Rand liegt in jeder markierten Reihe des anderen Faktors aufgelegt. Dadurch entsteht eine rechteckige Figur. Die Summe der Werte aller ihrer Steine ist bereits das gesuchte Produkt. Die Anordnung muss nur noch gekürzt werden.
Die Markierungen für die Faktoren an den Rändern werden entfernt.



Von unten beginnend wird für jede Diagonale geprüft, wieviel Steine sie enthält. Zwei Steine werden durch einen auf der nächst höheren Diagonalen ersetzt, ein Stein allein kommt nach rechts aussen an den Rand.

Die Bewegungen auf allen Diagonalen sind:

Diagonale	Anzahl der Steine	Bewegung
1 — 1	1 Stein	an den Rand
2 — 2	1 Stein	an den Rand
4 — 4	1 Stein	an den Rand
8 — 8	2 Steine	wegnehmen, ein Stein auf die Diagonale darüber
16 — 16	3 Steine	einer an den Rand, zwei wegnehmen, ein Stein auf die Diagonale darüber
32 — 32	1 Stein	an den Rand
64 — 64	1 Stein	an den Rand
128 — 128	1 Stein	an den Rand



Das Ergebnis der Multiplikation liegt am rechten Rand, es lautet *abcefgh* und nach Umrechnung 247.

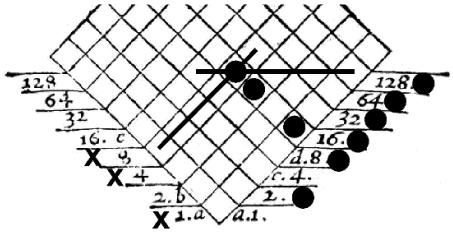
Der mathematische Hintergrund dieser Rechnung ist folgender:
die Multiplikation ergibt ausgeführt und nach den Exponenten der neun Teilprodukte geordnet

(a + b + e) · (a + c + d) =
+ ed
+ ec
+ ae + bd
+ bc + ad
+ ac
+ ba
+ aa

In der gleichen Anordnung liegen die Steine auf dem Brett. Durch Kürzen wird darauf hin gearbeitet, dass für jeden Exponenten entweder kein Stein oder höchstens einer übrig bleibt.

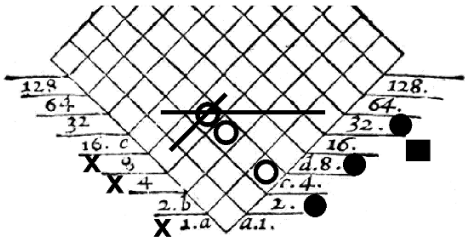
Die Division

Als Division führt Napier die Aufgabe 250 / 13 vor.

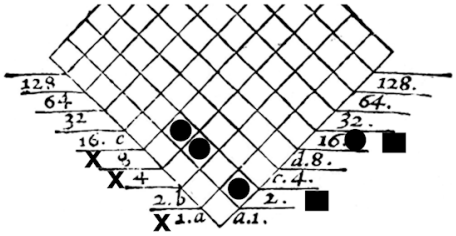


Der Dividend 250 wird als *bdefgh* am rechten Rand angelegt, der Divisor 13 als *acd* am linken Rand auf andere Weise markiert, damit man ihn nicht mit einem Divisor bei der Arbeit verwechselt.
Nun geht es darum, Vielfache des Divisors schrittweise vom Dividenden abzuziehen. Dazu wird der Divisor parallel zu dem auf andere Weise markierten Divisor aufgelegt und zwar dort, wo sein Stein mit dem höchsten Wert ($d = 8$) den Wert des höchsten Dividenden-Steines ($h = 128$) einnimmt. In dieser Position, sie ist im Bild oben eingetragen, wird jeder Stein des Divisors mit $e = 16$ multipliziert. Napier bestimmt diese Position wiederum mit Vergleichen zu den Bewegungen der Spielsteine Turm und Läufer.

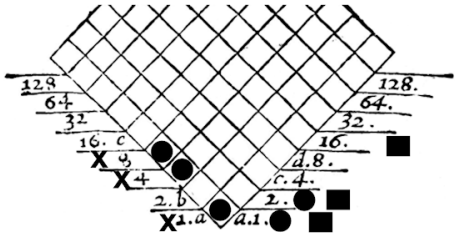
Dann wird geprüft, ob man jeden Stein des Divisors vom Dividenden abziehen kann. Dies ist möglich für die Steine 128, 64 und 16, die dem Dividenden entnommen werden. Eventuell muss man den Dividenden nach der schon bekannten Methode erweitern. Den neuen Dividenden zeigt das nächste Bild. Gleichzeitig markiert man die Position des Divisors, in den nächsten Bildern wird dies mit kleinen Quadraten gemacht. Das erste liegt bei $e = 16$.



Die nächste Position des Divisors, hier mit nicht ausgefüllten Kreisen markiert, liegt bei $c = 4$. Die Steine des Divisors lassen sich jedoch nicht vom Rest des Dividenden abziehen, sodass diese Position übersprungen wird.



Die nächste Position des Divisors liegt bei $b = 2$. Die Steine des Divisors lassen sich vom Restdividenden *bdf* abziehen, indem man letzteren auf *bdee* erweitert. Der neue Restdivident lautet $e = 16$. Die Position *b* wird als zweiter Summand im Quotienten wiederum markiert.



Als letztes wird die Position des Divisors bei $a = 1$ vom Restdividenden abgezogen. Dazu muss dieser nochmals von *e* auf *aabcd* erweitert werden. Die Position *a* wird als dritter Summand im Quotienten markiert.

Die Lösung lautet *abe* Rest *ab* oder 19 Rest 3

Die vorgestellte Division lässt sich schreiben in der Form

$$(b + d + e + f + g + h) / (a + c + d) = (x + y + z) \text{ oder}$$
$$(b + d + e + f + g + h) = (x + y + z) \cdot (a + c + d)$$

mit den unbekannten Summanden x, y, z des Quotienten.
In dem oben dargestellten Ablauf wird versucht, durch wiederholtes Abziehen der Vielfachen des Divisors vom Dividenden die Summanden des Quotienten zu finden:

$$(b + d + e + f + g + h)$$
$$- x \cdot (a + c + d)$$

$- y \cdot (a + c + d)$
$- z \cdot (a + c + d)$
$= \text{Rest}$

Die Quadratwurzel

Wenn man auf dem Brett eine Zahl quadriert entsteht eine Figur, die Napier als Grundlage für den Begriff Gnomon[7] verwendet. Er bezeichnet mit diesem Begriff eine V-förmige Anordnung von Steinen, die, zu einem einzelnen Stein oder zu einem Quadrat angelegt, ein neues Quadrat ergeben. Diese Definition verdeutlicht er mit Skizzen (Bild 8).

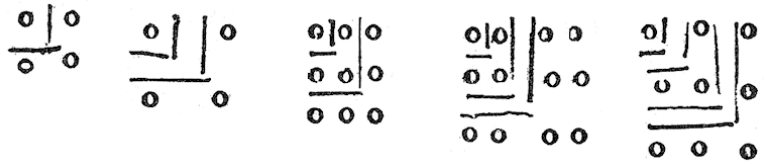
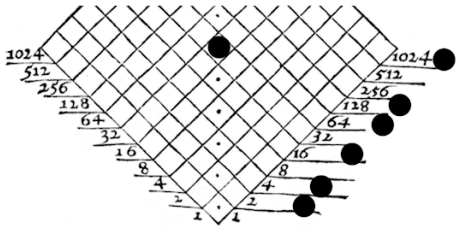


Bild 8: Nepers Skizzen zum Begriff Gnomon

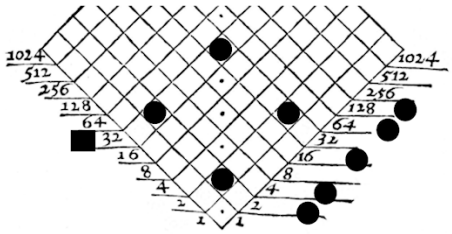
Er weist zusätzlich auf eine besondere Eigenschaft der Figuren hin: durch Hinzufügen von 3, 5, 7,... Steinen entsteht jedes mal ein Quadrat aus 4, 9, 16,... Steinen. Den ersten Stein nennt er den Kopfstein des Gnomons oder des Quadrats.

Napier berechnet als Beispiel $\sqrt{1238}$.

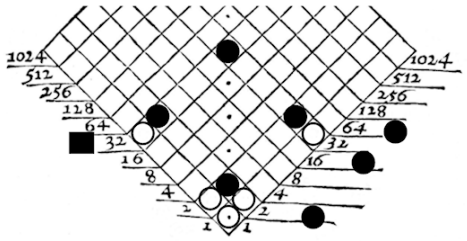


Der Radikand R = 1238 = *bceghl* wird an einem Rand (hier ist es der rechte) angelegt. Dann sucht man die grösste Quadratzahl, die vom Radikanden abgezogen werden kann. Sie muss auf der mit Punkten gekennzeichneten Diagonalen liegen. Hier ist es 32^2. Sie wird mit einem Stein markiert und vom Radikanden abgezogen. Dieser Stein wird zum Kopfstein.

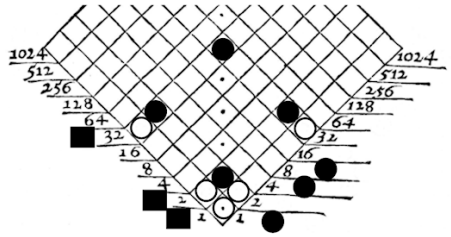
7 „In der Mathematik, speziell in der planaren Geometrie, bezeichnet der Begriff Gnomon die Restfläche zwischen zwei ähnlichen Figuren. Diese Konstruktion war schon in der griechisch-hellenistischen Mathematik bekannt und bezeichnete eine geometrische Figur, die entsteht, wenn man aus einem Parallelogramm ein ihm ähnliches und ähnlich gelegenes so ausschneidet, dass es eine Ecke mit dem ursprünglichen Parallelogramm gemeinsam hat.“ (Zitat aus Wikipedia online, Zugriff 15. Nov. 2008)



Dann wird für diesen Stein der grösste Gnomon aus 3 Steinen gesucht, den man vom Rest des Radikanden noch abziehen kann. Hier sind dies die Steine mit den Werten 64, 64 und 4. Sie werden vom Restradikanden abgezogen, aber inaktiv liegen gelassen. Jede Reihe im Gnomon wird am linken Rand markiert.



Sodann sucht man den nächsten Gnomon mit 5 Steinen, der sich vom Restradikanden abziehen lässt. Hier sind dies die Steine 32, 32, 2, 2 und 1. Ihr Wert wird vom Restradinkanden abgezogen, wozu dieser mehrfach erweitert werden muss.



Nach Ende der Rechnung beträgt der Restradikand 13 und die drei markierten Reihen ergeben zusammen den Wert 35. Das Ergebnis lautet deshalb $\sqrt{1238} = 35$ Rest 13.

Napiers Ablauf der Rechnung hat folgenden Hintergrund:
gesucht wird

$$\sqrt{R} = f + b + a$$

daraus folgt

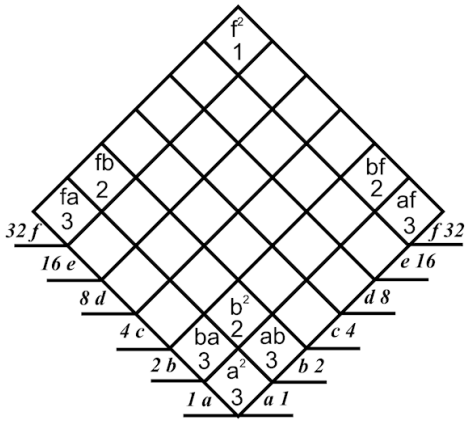
$$R = (f + b + a) \cdot (f + b + a)$$

multipliziert ergibt sich (vgl. hierzu die Skizze unten)

f^2	Stein 1	1 Summand
$+ fb + bf + b^2$	Steine 2	3 Summanden
$+ fa + af + ba + ab + b^2$	Steine 3	5 Summanden

Napier zieht zunächst $f^2 + 2bf + b^2 = (f + b)^2$ ab und dann, falls ein verkleinerbarer Rest bleibt, auch noch die restlichen Summanden $2af + 2ab + b^2$, um auf den Ausdruck $(f + b + a)^2$ zu kommen. Anders ausgedrückt: er zieht vom Radikanden zunächst das grösste Quadrat ab und arbeitet dann durch Anlegen weiterer Steine als V-förmige Gnomone, die immer aus einer ungeraden Anzahl von Steinen bestehen,

alle restlichen Summanden des Quadrats R ab.



Die belegten Reihen einer Richtung im Quadrat benennen die Summanden f, b und a des Ergebnisses, wovon man sich in obiger Skizze leicht überzeugen kann.

Die weitere Entwicklung

Auf die *Rabdologia* 1617 folgten bald Bearbeitungen in deutscher und englischer Sprache, die sich jedoch auf die Rechenstäbchen beschränken. Nur Marco Locatello (Lit. 4) geht in seiner freien Übertragung aus dem Jahr 1623 auf die *Arithmetica Localis* ein. Im Jahr 1626 erschien eine holländische Übersetzung von Ezechiel de Decker (Lit. 2), die wir nicht einsehen konnten. Weitere historische Bearbeitungen sind dem Verfasser nicht bekannt. Offensichtlich konnte sich die *Arithmetica Localis* als Rechenhilfe nicht durchsetzen, obwohl das Rechnen mit Steinen auf einem Brett zumindest als Methode durchaus geläufig war. Über die Gründe hierfür kann man nur Vermutungen anstellen. Das Rechenbrett ist nicht allein mit ein paar Linien gezeichnet, es bedarf einer umfangreicheren Vorbereitung. Zudem erfordert das Rechnen vorher und nachher die Übertragung von Zahlen zwischen zwei Systemen. Unabhängig davon bleibt die *Arithmetica Localis* ein anschauliches Beispiel für den Erfindungsreichtum und die Genialität John Napiers.

FINIS.

Bildnachweis

1, 4, 5, 8 Schlussvignette	aus Neper, Lit. 7
2,7	aus Neper, Lit. 7, vom Verfasser ergänzt
3,6	aus Locatello, Lit. 4
alle anderen Skizzen	vom Verfasser erstellt, z. Tl. unter Zuhilfenahme von Bildern aus Neper

Literatur

1 Brodersen, Kai: Die Arithmetica localis des John Napier (1617): Ein lateinischer Grundtext der ‚digitalen Revolution'. In: Rolf Kussl (Hrsg): Präsenz der Antike, Speyer 2006

2 de Decker, Ezechiel: Eerste Deel vande nievwe Telkonst. Gouda 1626.

3 Hawkins, W. F.: The first calculating machine (John Napier, 1617). In: IEEE Annals of the History of Computing, Vol. 10, Issue 1 (Jan 1988)

4 Locatello, Marco: Raddologia. Verona 1623

5 Lüneburg, Heinz: Von Zahlen und Grössen. Berlin 2008. Hier Nepers Arithmetica Localis in Kap. IIII: Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade

6 Napier, J: Rabdology. Translated by W.F. Richardson, Tomash Publishers 1990 (Charles Babbage Institute Reprint Series for the History of Computing, Vol.15)

7 Neper, J.: Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo..., Edinburgh 1617. Faksimiledruck Osnabrück 1966.

8 Siemens AG (Hrsg.).: Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins. Berlin 1966, 3. Aufl. Berlin 1979

9 Weiss, Stephan: Die Rechenstäbe von Neper, ihre Varianten und Nachf. (2007) URL: http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen (Stand 15. Nov. 2008)

10 Wikipedia: Die freie Enzyklopädie URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Hauptseite (Zugriff 15. Nov. 2008)

21. Nov. 2008
http://www.mechrech.info
□