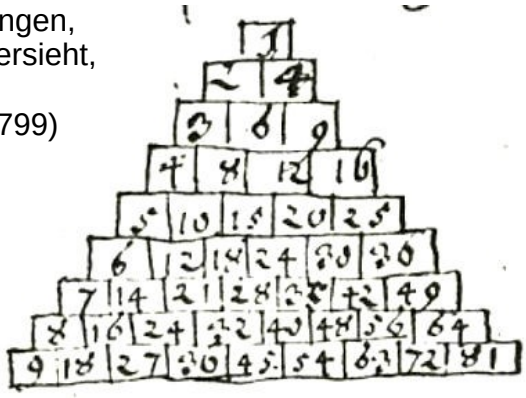
Stephan Weiss

Das Einmaleins durch die Jahrhunderte

erweiterte Ausarbeitung zu meinem Vortrag am 13. Juli 2015
in der Rudolf-Steiner-Schule, 82194 Gröbenzell

Man gefällt sich selten in Dingen,
die man so inne hat und übersieht,
wie etwa das Einmaleins.
G. Ch. Lichtenberg (1742-1799)



Das Einmaleins durch die Jahrhunderte

In diesem Vortrag werden ausgewählte Darstellungen des Einmaleins vorgestellt. Ort und Zeit beschränken sich auf Europa vom 5. bis in das 20. Jahrhundert. Auswahlkriterien für Erläuterungen waren dabei der historischer Hintergrund, die Anordnung der Produkte, die Schreibweise der Zahlen sowie ihre künstlerische Ausgestaltung. Zudem wird auf die vier Funktionen des historischen Einmaleins eingegangen: die Demonstration einer Zahlenlehre, als Multiplizierhilfe sowie als Lehr- und Lernmittel.

Der Mathematiker und Physiker Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) schrieb

> „...und man gefällt sich selten in Dingen, die man so inne hat und übersieht, wie etwa das Einmaleins.“[1]

Mit seiner Feststellung hat er Recht. Das Einmaleins ist aus seiner Sicht ein explizit genanntes Beispiel für Objekte oder Fähigkeiten, die einem geläufig, so

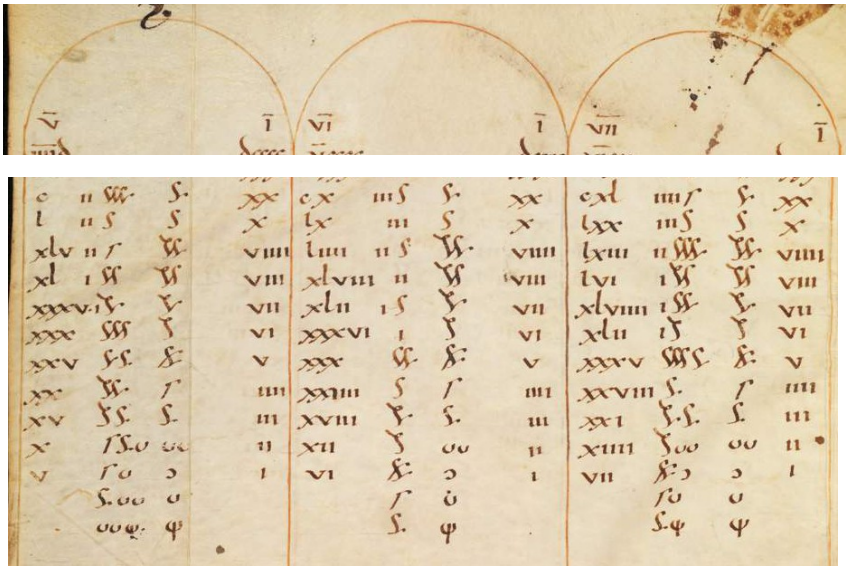
1 Lichtenberg, Georg Christoph: Aufzeichnungen und Aphorismen, Sudelbuch K, 186

selbstverständlich sind, dass sie keine Beachtung mehr und damit keinen Gefallen finden. Die nachfolgenden Ausführungen sollen diesen Umstand korrigieren.

Vorab stellt sich die Frage, was unter einem Einmaleins zu verstehen ist.
Bei der Multiplikation zweier Zahlen in einem Positionssystem muss jeder Stellenwert der einen Zahl mit jedem Stellenwert der anderen Zahl multipliziert werden. In Additionssystemen gilt das gleiche für alle Summanden. Bei römischen Zahlzeichen ist insofern eine Einschränkung zu machen, als sie zuvor auf die Summe von Zehnerpotenzen umgeschrieben werden müssen.
Aus dieser Rechenvorschrift ergeben sich für das dezimale System mit seinen 10 Ziffern 0 bis 9 somit 100 Teilprodukte von 0x0 bis 9x9. Sie werden auch das kleine Einmaleins genannt. Üblicherweise lässt man die Produkte mit den Faktoren 0 und 1 weg und erhält somit ein verkürztes kleines Einmaleins mit 8x8=64 Teilprodukten von 2x2 bis 9x9.

Der Umfang eines vollständigen Einmaleins hängt von der Basiszahl des Zahlensystems ab. Die Basiszahl 8 mit den Ziffern 0 bis 7 besitzt ein vollständiges Einmaleins mit 64 Produkten 0x0 bis 7x7 = $(61)_8$. Die Basiszahl 12 mit den Ziffern 0..9, A, B führt zu einem vollständigen Einmaleins mit den 144 Produkten 0x0 bis BxB = $(A1)_{12}$.
Das bei Astronomen der beginnenden Neuzeit beliebte Sexagesimalsystem mit seiner Basiszahl 60 und den Ziffern 0 bis 59 führt zu einem vollständigen Einmaleins mit 3600 Teilprodukten und zu einem verkürzten Einmaleins von immerhin noch 3364 Teilprodukten bis 59x59 =$(58.1)_{60}$, die in möglichst übersichtlicher Anordnung dargestellt werden mussten, weil sich niemand eine so grosse Zahl von Produkten merken kann.[2]

2 Siehe Weiss, Stephan: Reconstruction and Background of Gaspar Schott's Tabula Sexagenaria 1661, (2012) URL http://www.mechrech.info/publikat/Schott-TabSexa.pdf



Victorius Aquitanus, Calculus. Abbo von Fleury, Commentarius in calculum Victorii - Staatsbibliothek Bamberg Msc.Class.53, Würzburg oder Bamberg, Anfang 11. Jh. (Victorius von Aquitanien, lat. Victori(n)us Aquitan(ic)us; um 457)

Der Mathematiker Victorius von Aquitanien schrieb im 5. Jahrhundert den *Calculus Victorii,* ein Tafelwerk zur Erleichterung von Multiplikation und Division.[3] Zudem war er Computist und berechnete den Kalender, insbesonders den beweglichen Ostertermin. Sein Tafelwerk wurde später von Abbo von Fleury, einem Mathematiker des 10. Jahrhunderts, kommentiert.
Das obige Bild zeigt einen gekürzten Ausschnitt einer Multipliziertafel in einer Abschrift des Abbo von Fleury aus der Zeit Anfang des 11. Jahrhunderts. Dargestellt sind hier die Spalten für die Vielfachen von 5 (links), 6 (mitte) und 7 (rechts). Von unten nach oben sind ihre Produkte mit 1 bis 10, 20 usw. eingeschrieben. Die Zeichen dazwischen stellen Bruchteile dar. Zuweilen werden die Trennlinien auch als Säulen und die verbindenden Bögen oben als Arkaden gezeichnet.
Obwohl die Abschrift aus dem 11. Jahrhundert stammt kann man annehmen, dass die Darstellung dem frühen Original entspricht, denn auch der römische Abakus bestand aus senkrechten Spalten, nach oben hin mittels Bögen abgeschlossen.

Angefertigt wurden Abschriften in den Scriptorien der Klöster.

---

3 Christ, Wilhelm: Über das Argumentum calculandi des Victorius und dessen Commentar (Aus den Sitzungsberichten der Bay. Akademie der Wissenschaften 1863, I, p. 100-152)

Friedlein, Gottfried: Der Calculus des Victorius. In Zeitschrift f. Mathematik u. Physik XVI,1. S. 42-79, Leipzig 1871

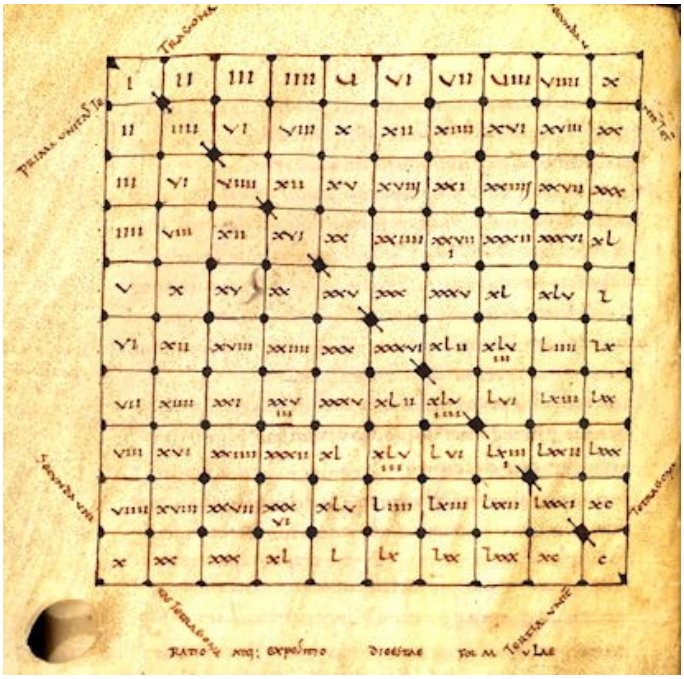
Kinkelin, Hermann: Der Calculus Victorii, 1868

Mönche im Scriptorium

Madrid, Biblioteca de San Lorenzo de El Escorial, 14th century

Als *scriptorium* bezeichnet man eine Schreibstube, die zumeist einem Kloster zugeordnet war. Dort haben die Mönche sakrale und profane Texte für die eigene Institution oder für adelige Auftraggeber mit Tinte und Farben auf Pergament oder Papier, seltener Papyrus, handschriftlich vervielfältigt.[4]

4 Für weitere Erläuterungen zu Material und Arbeitsschritten s. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg: Skriptorium – Buchproduktion im Mittelalter (mit weiterführender Literatur) URL http://digi.ub.uni-heidelberg.de/de/bpd/skriptorium.html



Aus Boethius, Anicius Manlius Severinus: De institutione arithmetica - Staatsbibliothek Bamberg Msc.Class.8, [S.l.], fol. 28v.
Nordostfrankreich, 3. Viertel 9. Jh.

Ein mathematischer Text, der das Denken des Mittelalters erheblich beeinflusst hat ist *De Institutione Arithmetica* (dt. die arithmetische Unterweisung oder Methode) von Anicius Manlius Severinus Boet(h)ius, einem spätantiken römischen Gelehrten, der um 500 lebte. In seiner Schrift gibt er eine quadratische Anordnung von Zahlen, die er wiederum von Nikomachos von Gerasa (um 150 n. Chr.) übernimmt.[5]
Die Schrift von Boethius wurde häufig kopiert. Masi[6] zählt 180 heute noch erhaltene Abschriften auf.

In dieser quadratischen Anordnung sind die Zahlen 1 bis 10 (X) sowohl am oberen Rand von links nach rechts als auch am linken Rand von oben nach unten aufgetragen. Im Schnittpunkt von Zeile und Spalte der beiden Produktfaktoren liest man das gesuchte Produkt ab. In der Diagonalen stehen alle Quadratzahlen, weshalb diese hervorgehoben ist. Wegen des kommutativen Gesetzes a * b = b * a

5 Nicomachus of Gerasa: Introduction to arithmetic, translated into English by Martin Luther D'Ooge; with studies in Greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski, University of Michigan studies, London 1926.

6 Masi, Michael: Boethian Number Theory: A Translation of the *De Institutione Arithmetica*, 1983, 2006

kommen alle Produkte mit Ausnahme der Quadrate sowohl oberhalb der Diagonalen als auch unterhalb vor.

Boethius zeigt in seiner *Arithmetica*, dass die Zahlen innerhalb des Quadrats Produkte der beiden Faktoren an den Rändern links und oben sind. Er verwendet das Quadrat jedoch nicht für Rechnungen, die Zahl ist bei ihm keine Rechnungsgrösse. Vielmehr gibt er eine Herleitung von Zahlen und ihren Beziehungen im Rahmen einer theoretisch ausgerichteten Zahlenlehre, wozu auch diese Tafel Verwendung findet.[7]
Nach mittelalterlicher Auffassung hatte Gott bei der Erschaffung der Welt die Ordnungsgrößen Maß, Zahl und Gewicht mitgeschaffen. Wer Gottes Schöpfung begreifen wollte, benötigte dazu auch Einsicht in die Zahlen und ihre Beziehungen.[8]

Die Darstellungen des Einmaleins hat man bis in das 18. Jahrhundert hinein als *tabula pythagorica* oder *mensa pythagorea* oder ähnlich bezeichnet und brachte fälschlicherweise den griechischen Mathematiker Pythagoras mit ihr in Verbindung.[9] Tatsächlich beruht diese Bezeichnung auf einem Fehler beim Kopieren. Es existiert nämlich eine Schrift über Geometrie, die Boethius zugeschrieben wird und in der unter der Bezeichnung *tabula pythagorica* ein Abakus dargestellt ist. Da der Abakus mit seinen Spalten und Bögen einer Multipliziertafel sehr ähnlich sieht soll in späteren Abschriften an Stelle des Abakus eine Multipliziertafel eingetragen worden sein ohne die ursprüngliche Bezeichnung zu ändern.[10] Daraus wiederum resultierte die irrige Kombination Pytagoras und Einmaleinstafel.

Das quadratische Einmaleins ist inhaltlich natürlich in allen Abschriften identisch. Unterschiede gibt es hingegen in der grafischen Ausgestaltung.

---

7 *De Institutione Arithmetica,* Buch I, Abschn. 23-27 (Masi 1983, 2006)

Holl, Alfred: Spiel mit Zahlen – Kampf mit Zahlen? Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel Rithmomachie in seiner Regensburger Fassung um 1090. In Reports from Växjö University – Mathematics, natural sciences and technology, Nr.3, 2005
URL http://www.uni-regensburg.de/sprache-literatur-kultur/germanistik-aedl-1/medien/rithmo_rapport.pdf

8 Zitat aus Schiffler, Horst: Kopfrechnen schwach. Einblicke in die Geschichte des Rechen- und Mathematikunterrichts. Begleitschrift zur Ausstellung im Saarländischen Schulmuseum Ottweiler, 27. Februar 2004
URL http://www.schulmuseum-ottweiler.net/magazin/geschichte-des-mathematikunterrichts

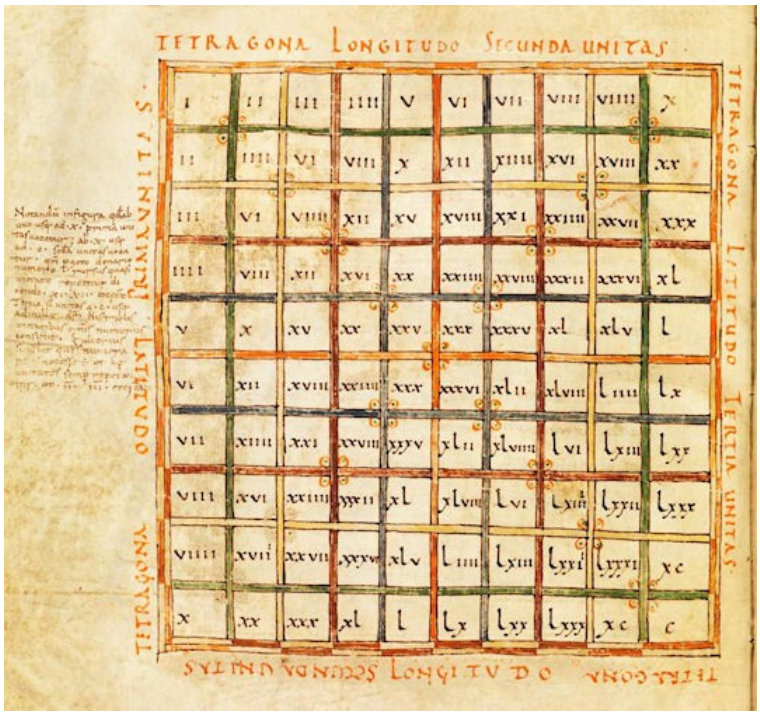
9 Smith, David E.: History of Mathematics, Vol. II, 1958, S. 124-126

Deschauer, Stefan: Lern wol mit vleiß daß eyn mol eyn... Ein Beitrag zur Geschichte des Kopfrechnens. In Mathematiche Semesterberichte, Bd. XXXVII/1990, H. 1, S. 5

10 Nicotra, Luca: La tavola pitagorica: un falso storico dimenticato. (19.9.2014)
URL http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica

(Friedlein, Gottfried ed.) Anicii Manlii Torquati Severini Boetii de Institutione Arithmetica Libri Duo: de Institutione Musica Libri Quinque, 1867, S. 396

Bossut, Charles: Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik, Band 1, übers. von N. Th. Reimer, 1804, S. 31-32

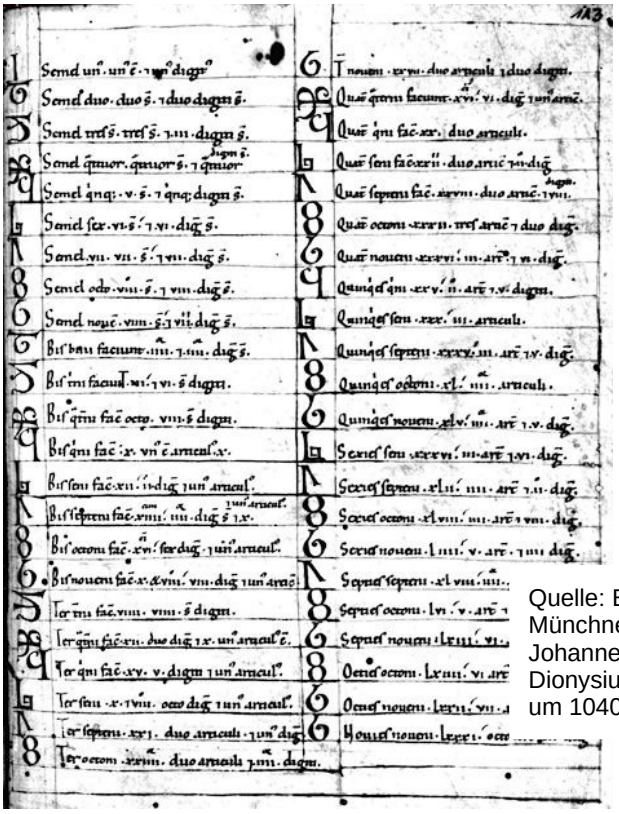


Aus Boethius, De institutione arithmetica [u.a.] - Staatsbibliothek Bamberg Msc.Class.6, [S.l.], fol. 38v. Vermutlich Oberrhein (Straßburg?), Ende 10. oder Anfang 11. Jh.

In dieser Darstellung, ebenfalls aus einer Boethius-Abschrift, führt der Schreiber die Begrenzungen doppelt und farbig hinterlegt aus, er materialisiert sie sozusagen. Zudem sind die Begrenzungen der Zellen ineinander verwoben. Nicht nur eine sondern beide Diagonalen hat er hervorgehoben, wodurch die Bedeutung der Diagonale der Quadratzahlen verloren geht.

Boecio: Tratados de aritmética, música y geometría [Manuscrito] um 1100
Biblioteca Nacional de España, MSS/9088

Die Zeichnungen des Einmaleins hat man nicht immer qualitativ hochwertig angefertigt. Hier eine nachlässig ausgeführte Darstellung. Die Begrenzungen sind nicht gerade gezeichnet, die Zellen zu klein angelegt, sodass an manchen Stellen alle Zahlzeichen nicht nebeneinander geschrieben werden können. Zudem enthält die Darstellung Fehler: 4 x 9 = 32; 8 x 8 = 63.

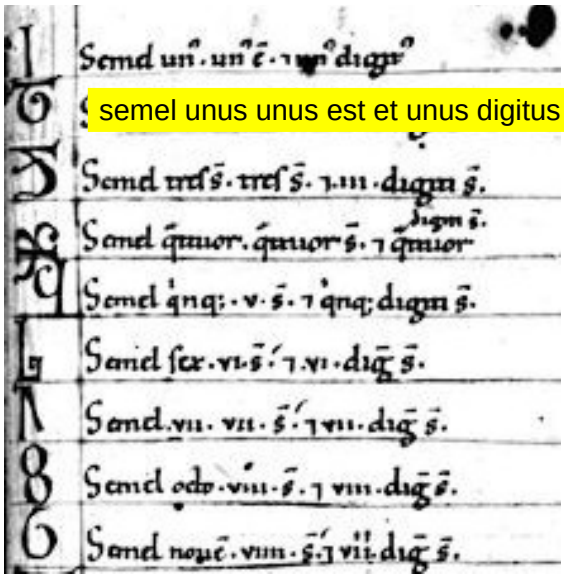


Quelle: Bayerische Staatsbibliothek, Münchner Digitalisierungszentrum: Johannes Scotus Eriugena - Dionysius Areopagita BSB Clm 14137, um 1040

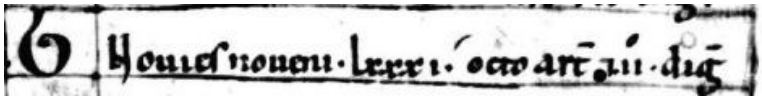
1	1 x 1 = 1	9	3 x 9 = 27
2	1 x 2 = 2	4	4 x 4 = 16
3	1 x 3 = 3	5	4 x 5 = 20
4	1 x 4 = 4	6	4 x 6 = 24
5	1 x 5 = 5	7	4 x 7 = 28
6	1 x 6 = 6	8	4 x 8 = 32
7	1 x 7 = 7	9	4 x 9 = 36
8	1 x 8 = 8	5	5 x 5 = 25
9	1 x 9 = 9	6	5 x 6 = 30
2	2 x 2 = 4	7	5 x 7 = 35
3	2 x 3 = 6	8	5 x 8 = 40
4	2 x 4 = 8	9	5 x 9 = 45
5	2 x 5 = 10	6	6 x 6 = 36
6	2 x 6 = 12	7	6 x 7 = 42
7	2 x 7 = 14	8	6 x 8 = 48
8	2 x 8 = 16	9	6 x 9 = 54
9	2 x 9 = 18	7	7 x 7 = 49
3	3 x 3 = 9	8	7 x 8 = 56
4	3 x 4 = 12	9	7 x 9 = 63
5	3 x 5 = 15	8	8 x 8 = 64
6	3 x 6 = 18	9	8 x 9 = 72
7	3 x 7 = 21	9	9 x 9 = 81
8	3 x 8 = 24		

Das Bild stammt aus einer Handschrift aus dem Kloster St. Emmeram, Regensburg. Es zeigt im Gegensatz zum Quadrat eine völlig andere Darstellung.
Die Zahlzeichen an der linken Seite bedeuten von oben nach unten
1 bis 9, 2 bis 9, 3 bis 9, usw. bis 8 und 9, 9.

Das Schema links entspricht dem Aufbau der Liste: die ersten Zeilen von links oben nach unten geben die Produkte 1x1 bis 1x9, darunter folgen 2x2 bis 2x9, 3x3 bis 3x8, auf der rechten Seite oben weiter 3x9, 4x4 bis 4x9 usw. bis 8x8 und 8x9 sowie zuletzt 9x9 in der Zeile ganz unten.



semel unus unus est et unus digitus



novies novem LXXXI octo articuli et (?) digiti

Hier noch einmal vergrössert die ersten Zeilen links oben und die letzte Zeile rechts unten.

Eine solche Darstellung des Einmaleins bezeichnet man wegen ihrer Eindimensionalität eine Listendarstellung oder Listenform und da die Produkte mit den Quadraten beginnen eine verkürzte Liste.

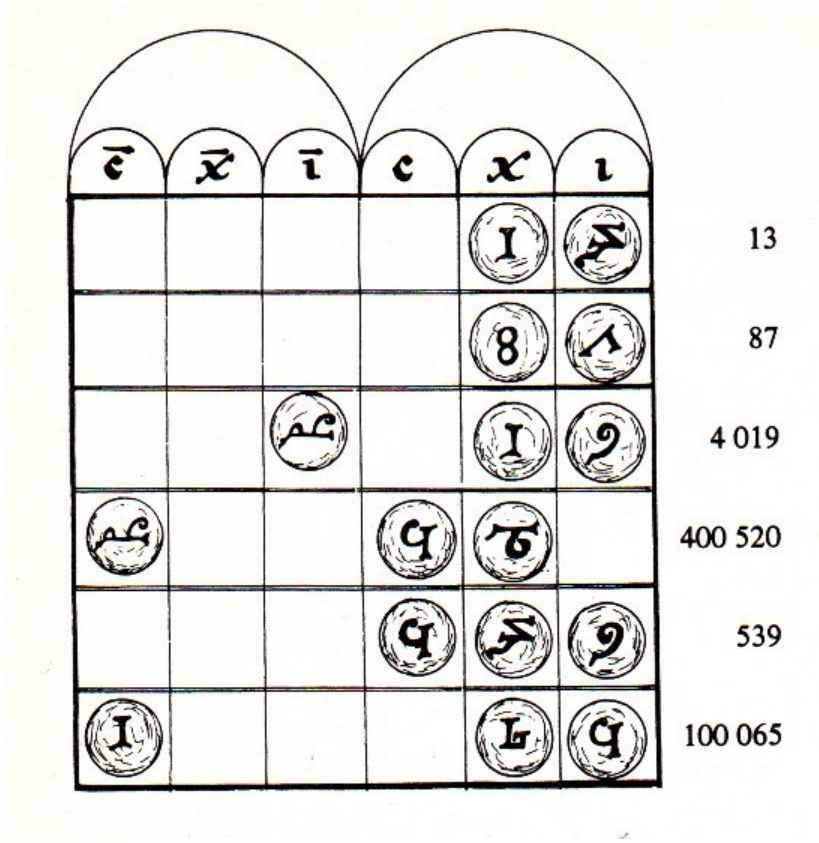
Die Produkte sind sowohl verbal als auch mit Zahlzeichen eingeschrieben.
Articulus bedeutet einen Zehner 10, 20... und *digitus* den Einer 1..9, *semel* einmal, *bis* zweimal, *ter* dreimal usw. Die Verwendung von Multiplikationssätzen legt die Vermutung nahe, dass sie zum Lernen oder Einüben dienten.
Davon geben die *Confessiones* des Kirchenlehrers Augustinus (354-430) Zeugnis (LXIII. 20, 22), in welchen zu lesen ist, dass ihm das *unum et unum duo, duo et duo quatuor* (1 und 1 zwei, 2 und 2 vier) ein verhasster Gesang gewesen sei. Diese bemerkenswerte Stelle weist nach, dass die elementaren Rechensätze in Reihenform eingeübt wurden und zwar durch lautes Chorsprechen.[11]
Wie die ganze Versfolge lautete, die Augustinus lernen musste, wissen wir nicht. Offensichtlich hat es sich um das Einüben der Addition gehandelt.

11 Absatz frei zitiert nach Sterner, Matthäus: Geschichte der Rechenkunst, 1891, S. 90

Auf Symbole für das Multiplizieren und ihre Gleichsetzung mit dem Ergebnis gehe ich weiter unten ein. An dieser Stelle sei nur festgehalten, dass die Zahlwörter einmal, zweimal,... die Multiplikation bereits enthalten und *est* (dt. ist) die Gleichheit zwischen Produkt und Ergebnis ausdrückt.

Damit man die richtige Zeile in der Liste findet ist jede links mit dem Zahlzeichen des zweiten Produktfaktors markiert. Bei diesen Zahlzeichen handelt es sich um sog. *apices* (Singular *apex*). Unter diesem Begriff versteht man sowohl kegelige Rechensteine aus Horn, als auch diese Ziffern, die oben aufgetragen waren.

Um 968 hatte der Mönch Gerbert von Aurillac, später Papst Silvester II, in Spanien die westarabischen Zahlzeichen kennengelernt. Er schrieb sie in abgeänderter Form, auf die Rechensteine, um mit ihnen auf dem Abakus zu rechnen.



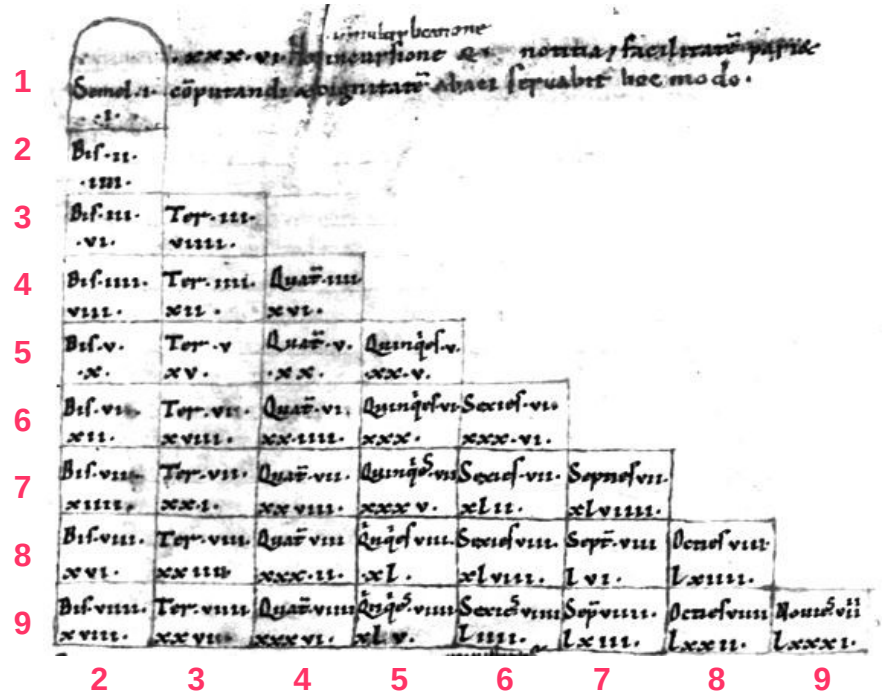
Der Abakus von Gerbert (um 950-1003)

Zuvor hatte man in jeder Spalte eine entsprechende Anzahl von Rechensteinen aufgelegt. Jetzt steht hier ein Stein mit seiner Ziffer.[12] Die Null kennt Gerbert nicht, Spalten ohne Inhalt bleiben leer. Die Zahlzeichen wirken künstlich, gewollt. Man nimmt an, dass dies beabsichtigt war, um sie auch in verdrehter Stellung leichter zu erkennen.
Das Wesentliche der neuen arabischen Ziffern und ihre Vorteile, nämlich dass man einschliesslich der Null ein Positionssystem bilden und schriftlich rechnen könnte, hat Gerbert nicht verstanden. Zudem gab er den Zahlzeichen geheimnisvolle, teils arabische Namen: igin (1), andras (2), ormis (3), arbas (4), quimas (5), caltis (6), zenis (7), temenias (8), celentis (9).

Die Apices konnten sich nicht durchsetzen, sie blieben auf das Wissen der Klosterebene beschränkt. Im 11. und 12. Jahrhundert sind arabische Zahlzeichen in Europa bekannt, jedoch ohne Null. Ab dem 12. Jahrhundert wird die Rechentechnik durch Einführung der Null tiefgreifend verändert. Ausschlaggebend war das wirt-

12 Bildquelle Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen, 1989, Abb. 352

schaftliche Wachstum und damit einher gehend der Bedarf nach einer schnellen und effizienten Rechenmethode. In diesem Zusammenhang muss Leonardo von Pisa und sein *liber abaci* genannt werden. Er macht die indo-arabischen Ziffern mit allen ihren Vorteilen und neuen Rechenverfahren in Europa bekannt.

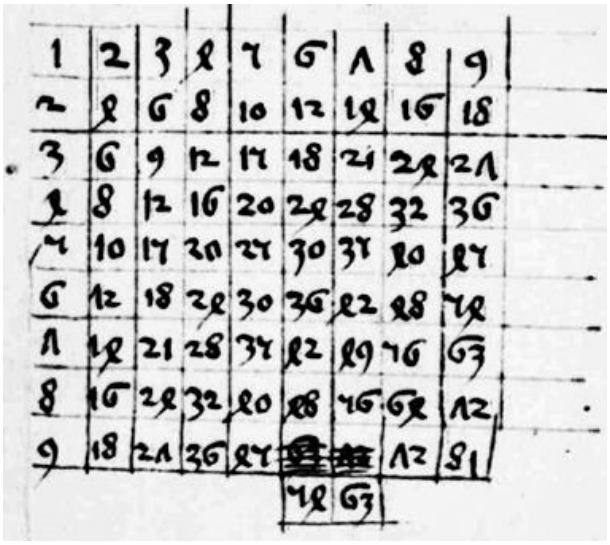


Quelle: Bayerische Staatsbibliothek, Münchner Digitalisierungszentrum: Bedae libri de arte metrica fragmentum... BSB Clm 14689, 12. Jhd.

In dieser Darstellung gibt es keine Produktfaktoren am Rand als Eingänge in die Tafel. In jeder Zelle sind sowohl die beiden Produktfaktoren als auch das Ergebnis notiert, der erste Faktor in einem lateinischen Zahlwort, der zweite Faktor und das Ergebnis mit römischen Zahlzeichen. In den Zellen in den Zeile ganz unten sind von links nach rechts eingetragen / Bis VIIII XVIII (zweimal 9 18) / Ter VIIII XXVII (dreimal 9 27) / usw.
Schreibt man die ersten und zweiten Faktoren zusätzlich am Rand an wie hier geschehen, dann erkennt man sofort, dass es sich bei dieser Darstellung um das untere Dreieck eines vollständigen Quadrats handelt mit den Quadratzahlen ab 2x2 in der Diagonalen. Das Produkt 1x1 ist links oben zusätzlich aufgesetzt.

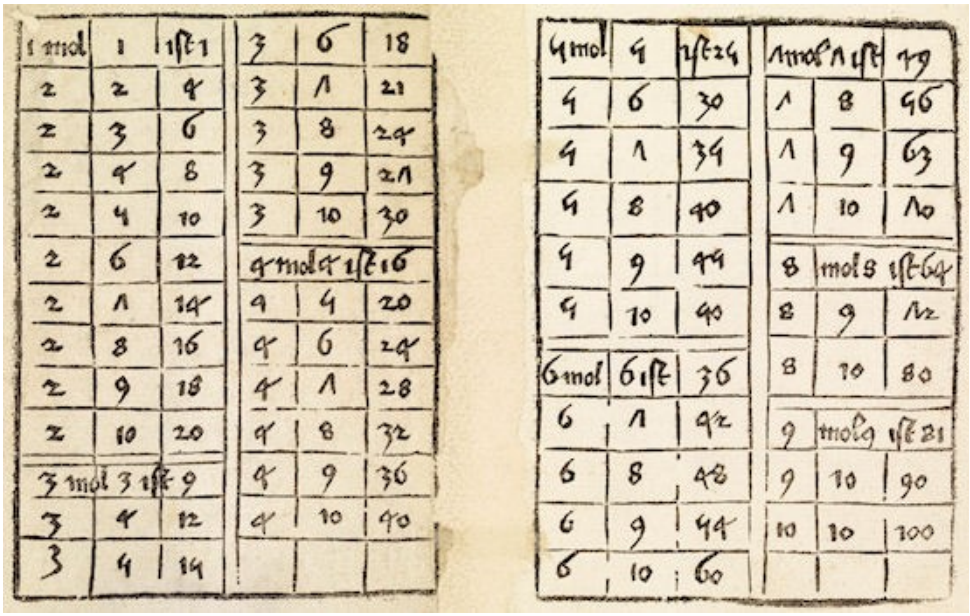
Quelle: New York, Columbia University, Rare Book and Manuscript Library, Plimpton MS166. Italy 13th c. - Boethius: De institutione arithmetica, fol. 11v

Hier nochmals eine quadratische Darstellung mit römischen Zahlzeichen. Der Schreiber hat sie mit linearen grafischen Elementen und den Farben rot und blau dekoriert. Parallele Linien sind mit den gleichen Bögen abgeschlossen, wie sie auch am Abakus vorkommen. Die Abbildung wirkt ansprechend und ist doch, wenn man genauer hinsieht, mit sehr lockerer Hand gezeichnet – ganz im Gegensatz zu den Prachtbibeln und anderen theologischen Texten, die ebenfalls in Skriptorien hergestellt worden sind. Letztere gehören zum religiösen Bereich und weisen deshalb in der Schrift und in den bildlichen Darstellungen höchste Präzision und ebensolche künstlerische Ausgestaltung auf. Obwohl Arithmetik und Geometrie als Hilfsmittel gesehen wurden, um das Wirken Gottes in seiner Schöpfung aufzuzeigen, ist die Beschäftigung mit Mathematik ganz allgemein dem Weltlichen zugeordnet und bedarf keiner präzisen künstlerischen Ausgestaltung.



Quelle: Bayerische Staatsbibliothek, Münchner Digitalisierungszentrum: Sammelband hauptsächlich astrologischen Inhalts - Clm 14111, 15. Jhd.

Eine quadratische Anordnung mit den neuen indo-arabischen Zahlzeichen, die bis auf wenige Ausnahmen den unsrigen schon sehr ähnlich sind.
Der Schreiber macht zwei Fehler, die er nachträglich korrigiert – man kann sich auch mal irren.



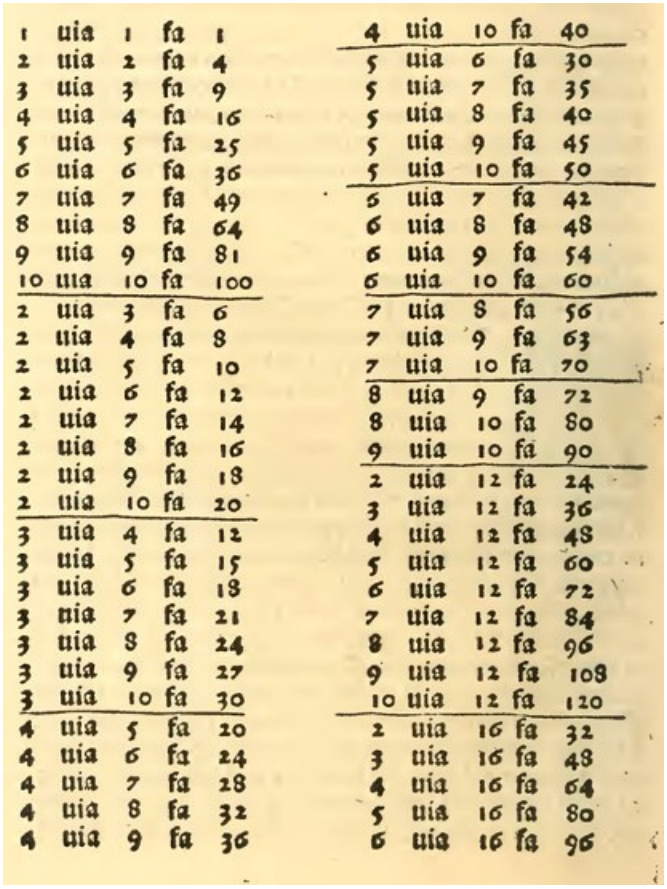
Wagner, Ulrich: Regula von dre ist drey dinck die du setzt.
Staatsbibliothek Bamberg Inc.typ.Ic.I.44 (ca. 1471 / 1482)

Im ersten gedruckten deutschen Rechenbuch wird eine verkürzte Liste gegeben, die mit den Quadraten beginnt und bis 10 reicht. Diese Obergrenze 10 ist wahrscheinlich ein Relikt aus den Tafeln mit römischen Zahlzeichen, deren Faktoren sich ebenfalls bis 10 (X) erstrecken.

Das Operationszeichen „mal“ (x) und das Gleichheitszeichen „ist gleich“ (=) treten erst ab Anfang des 17. Jahrhunderts auf. Hier sind sie verbal durch „mol“ und „ist“ ersetzt.

Das Buch ist als Holztafeldruck, auch Blockdruck genannt, hergestellt. Dazu wird die Darstellung jeder Seite vollständig und spiegelverkehrt in eine Holztafel geschnitten, diese eingefärbt und dann auf Papier gedruckt. Dieses Verfahren ist ein Vorläufer der Erfindung Gutenbergs. Letzterer hatte nicht das Drucken an sich, sondern das Drucken mit beweglichen Lettern erfunden. Er wollte auf diesem Weg die gleichmässige Handschrift der Mönche nachahmen.

x^2



1 uia 1 fa 1
2 uia 2 fa 4
3 uia 3 fa 9
4 uia 4 fa 16
5 uia 5 fa 25
6 uia 6 fa 36
7 uia 7 fa 49
8 uia 8 fa 64
9 uia 9 fa 81
10 uia 10 fa 100

2 uia 3 fa 6
2 uia 4 fa 8
2 uia 5 fa 10
2 uia 6 fa 12
2 uia 7 fa 14
2 uia 8 fa 16
2 uia 9 fa 18
2 uia 10 fa 20

3 uia 4 fa 12
3 uia 5 fa 15
3 uia 6 fa 18
3 uia 7 fa 21
3 uia 8 fa 24
3 uia 9 fa 27
3 uia 10 fa 30

4 uia 5 fa 20
4 uia 6 fa 24
4 uia 7 fa 28
4 uia 8 fa 32
4 uia 9 fa 36

4 uia 10 fa 40

5 uia 6 fa 30
5 uia 7 fa 35
5 uia 8 fa 40
5 uia 9 fa 45
5 uia 10 fa 50

6 uia 7 fa 42
6 uia 8 fa 48
6 uia 9 fa 54
6 uia 10 fa 60

7 uia 8 fa 56
7 uia 9 fa 63
7 uia 10 fa 70

8 uia 9 fa 72
8 uia 10 fa 80
9 uia 10 fa 90

2 uia 12 fa 24
3 uia 12 fa 36
4 uia 12 fa 48
5 uia 12 fa 60
6 uia 12 fa 72
7 uia 12 fa 84
8 uia 12 fa 96
9 uia 12 fa 108
10 uia 12 fa 120

2 uia 16 fa 32
3 uia 16 fa 48
4 uia 16 fa 64
5 uia 16 fa 80
6 uia 16 fa 96

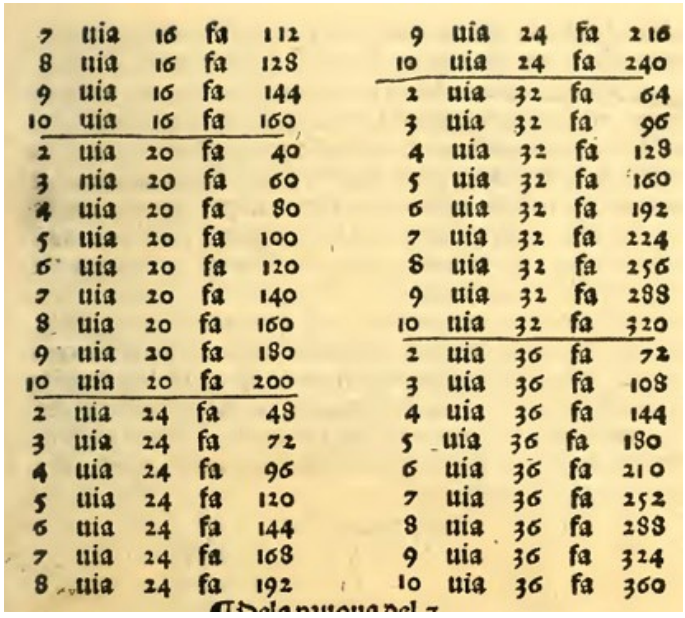
Piero Borghi: Arithmetica, 1484

12

16

20

24



7 uia 16 fa 112
8 uia 16 fa 128
9 uia 16 fa 144
10 uia 16 fa 160

2 uia 20 fa 40
3 uia 20 fa 60
4 uia 20 fa 80
5 uia 20 fa 100
6 uia 20 fa 120
7 uia 20 fa 140
8 uia 20 fa 160
9 uia 20 fa 180
10 uia 20 fa 200

2 uia 24 fa 48
3 uia 24 fa 72
4 uia 24 fa 96
5 uia 24 fa 120
6 uia 24 fa 144
7 uia 24 fa 168
8 uia 24 fa 192

9 uia 24 fa 216
10 uia 24 fa 240

2 uia 32 fa 64
3 uia 32 fa 96
4 uia 32 fa 128
5 uia 32 fa 160
6 uia 32 fa 192
7 uia 32 fa 224
8 uia 32 fa 256
9 uia 32 fa 288
10 uia 32 fa 320

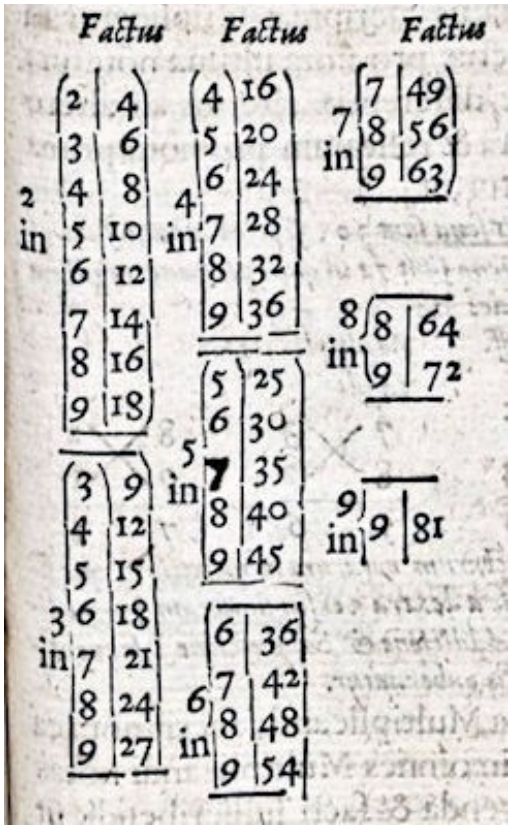
2 uia 36 fa 72
3 uia 36 fa 108
4 uia 36 fa 144
5 uia 36 fa 180
6 uia 36 fa 210
7 uia 36 fa 252
8 uia 36 fa 288
9 uia 36 fa 324
10 uia 36 fa 360

32

36

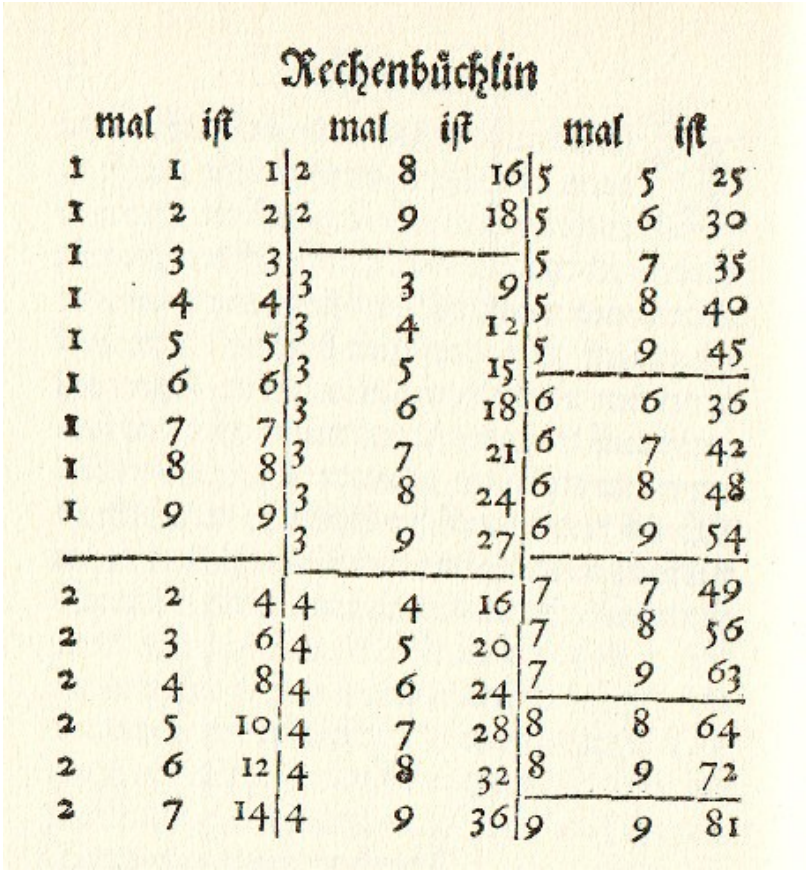
Borghi gibt eine verkürzte Liste, die am Anfang alle Quadratzahlen zusammenfasst und zudem die 2- bis 10-fachen der Zahlen 12, 16, 20, 24, 32, 36 enthält. Diese ausgewählten Faktoren werden in Kaufmannsrechnungen benötigt, weil sie sowohl in Mass- als auch in Währungseinheiten als Bruchteile vorkommen.
In der Treviso-Arithmetik von 1478 findet sich der Hinweis, dass die Vielfachen von 12 zu lernen sind, um aus Schillingen Pfennige und aus Gewichtspfunden Unzen zu machen, sowie die Vielfachen von 20, um aus Geldpfunden Schillinge zu machen.[13] Ein weiteres Beispiel: es galt 1 Gewichtspfund = 32 Lot.

13 Zitiert nach Deschauer 1990.



Aus Buscher, Heizo:
Arithmeticae libri duo. 1590

Eine andere Darstellung der verkürzten Liste mit zwei Zahlenspalten nebeneinander. Späte lateinische Texte verwenden so wie hier häufig für die Multiplikation das Wort *in* an Stelle von Zahlwörtern und für die Gleichheit mit dem Ergebnis *factus* (übers. getan, gemacht).

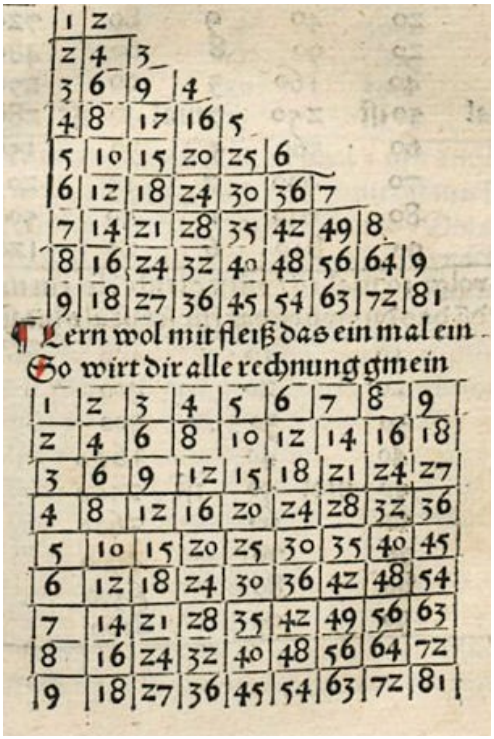


Rechenbüchlin

mal	ist		mal	ist		mal	ist
1	1	1	2	8	16	5	5	25
1	2	2	2	9	18	5	6	30
1	3	3				5	7	35
1	4	4	3	3	9	5	8	40
1	5	5	3	4	12	5	9	45
1	6	6	3	5	15			
1	7	7	3	6	18	6	6	36
1	8	8	3	7	21	6	7	42
1	9	9	3	8	24	6	8	48
			3	9	27	6	9	54
2	2	4	4	4	16	7	7	49
2	3	6	4	5	20	7	8	56
2	4	8	4	6	24	7	9	63
2	5	10	4	7	28	8	8	64
2	6	12	4	8	32	8	9	72
2	7	14	4	9	36	9	9	81

Aus Ries, Adam: Rechenung nach der lenge, auff den Linihen und Feder ... Leipzig, 1550.

Ries gibt ebenfalls eine verkürzte Liste, beginnend mit den Quadraten, und verwendet die Wörter „mal“ und „ist“.



Lern wol mit fleiß das ein mal ein
So wirt dir alle rechnung gmein

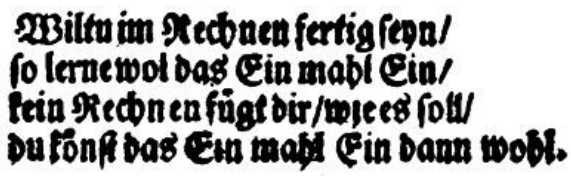
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Aus Widmann, Johann:
Behend und hüpsch Rechnung uff allen Kauffmanschafften.
Pfortzheim 1508

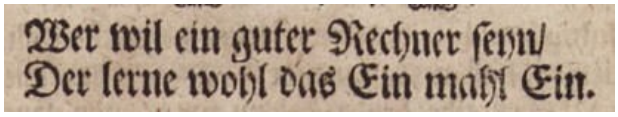
Widmann gibt zwei Darstellungen des Einmaleins, unten die quadratische, oben die dreieckige Anordnung. Neu und für uns wesentlich ist der Satz dazwischen

„Lern wol mit fleiß das ein mal ein
So wirt dir alle rechnung gmein“

Etwa ab dem letzten Drittel des 15. Jahrhunderts rückt ein pädagogischer Aspekt in den Vordergrund. Es mehren sich Ermahnungen, das Einmaleins auswendig zu lernen. Der Rechnende soll Sicherheit gewinnen und nicht auf das Einmaleins als eine Rechenhilfe angewiesen sein.
Zunächst genügt für anfallende Rechnungen der Abakus. Der aufkommende Handel gibt dem einfacheren schriftlichen Rechnen eine praktische Anwendung. Die Beherrschung des Einmaleins ist nicht nur für das schriftliche Rechnen notwendig, auch beim Rechnen auf den Linien, also auf dem Rechenbrett, wird mit dem Einmaleins gearbeitet. Jetzt führt der vermehrte Gebrauch beider Verfahren zur Forderung nach der mentalen Beherrschung des Einmaleins.



Johann Hemeling: Selbstlehrende Rechneschul. Frankfurt 1678



Johann Lammerding: Die selbst-lehrende Rechen-Schule. Münster 1718

Schlyper, Servatius: Neu-eröfnete vollständige,
wohlgezierte RechenStube. Mühlheim 1782

Eine Auswahl weiterer Ermahnungen zum Lernen des Einmaleins. Der Reim verstärkt die Aussage.

Als Beispiele für Ermahnungen, die nicht in Versform gefasst sind, seien hier aufgeführt

Adam Ries 1551

> ...und du müst für allen dingen / das einmaleins wol wissen / und außwendig lernen / wie hie.[14]

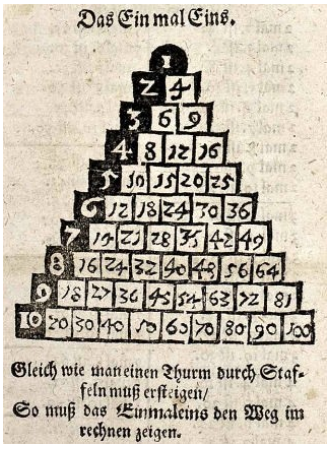
Wilhelm Schey 1618

> Es ist aber vor allem nothwendig/daß du das einmalein / wie es zu nechst hernach steht) gantz wol und vertig für sich und hindersich / außwendig lehrnest / dermassen / daß es dir so gemein werde (wie man sprächen möcht) als das täglich Brodt essen. Dann welcher das nicht weisst / dem ist schwärlich / recht und vertig zu multiplicieren / und viel weniger zu dividieren.[15]

14 Ries, Adam: Rechenbuch Auff Linien und Ziphren Inn allerley Hantierung, Geschefften und Kauffmannschafft, 1551, fol. 10v

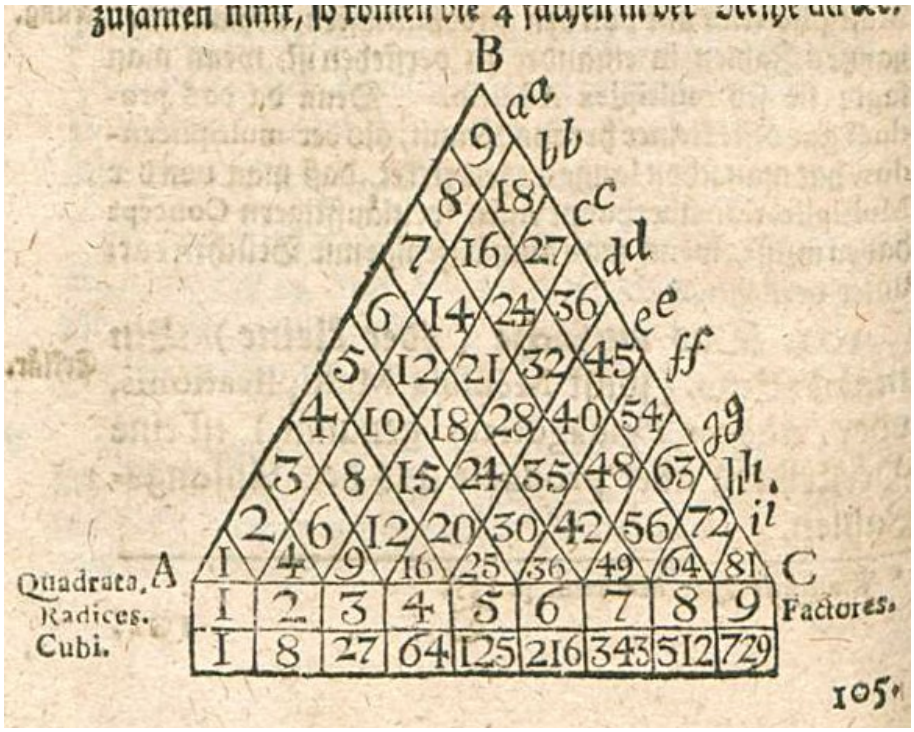
15 Schey, Wilhelm: Arithmetica oder Die Kunst zu Rechnen, 1618, S. 44

Fludd, Robert: De Naturae Simia seu Technica macrocosmi historia, Francofurti 1624



Tobias Beutel: Neu aufgelegte Arithmetica oder sehr nützliche Rechen-Kunst... Leipzig 1678

Zwei ungewöhnliche Darstellungen, links das Einmaleins im Kreis angeordnet, rechts als symmetrische Treppe aufgebaut. Beides sind unübliche Darstellungen und in ihrer Anordnung wenig brauchbar.
Wir haben hier Stilmittel des Barock vor uns, jedoch nicht in üppigem und in sich geschlossenen Formenreichtum, sondern in skurrilen, bizarren Auswüchsen.



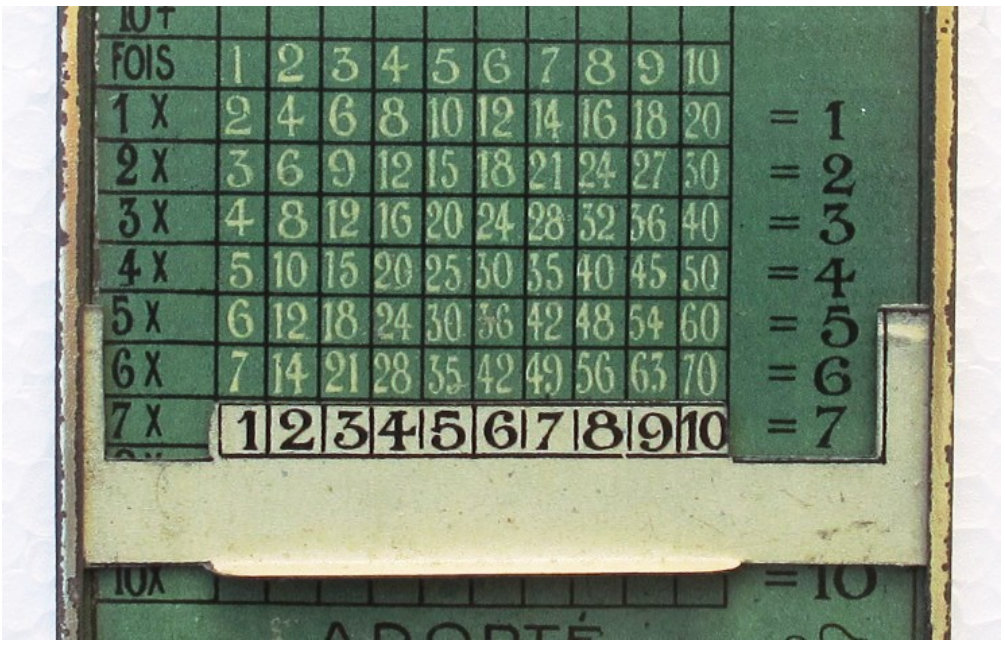
Johann Michael Poetius: Gründliche Anleitung zu der unter den Gelehrten jetzt üblichen Arithmetischen Wissenschaft, 1728, S. 51

Diese Darstellung bei Poetius ist ein weiteres Beispiel für eine verzerrte und schwer fassbare Anordnung. Man muss dem Autor zugute halten, dass er mit dieser Anordnung zeigen will, wie die Produktzahlen durch fortgesetzte Addition in den Reihen *aa, bb, cc* usw. gebildet werden können.[16] Zudem geht er davon aus, dass das Einmaleins keine Rechenhilfe sein kann, es muss vielmehr für wiederholtes Rechnen auswendig gelernt werden.[17]

Im 19. Jahrhundert tritt die Erziehung des Menschen in den Vordergrund, die Pädagogik wird Wissenschaft. In diesem Jahrhundert wird zudem Zug um Zug die gesetzliche Schulpflicht eingeführt. Darstellungen des Einmaleins als Lehr- und Lernmittel erhalten eine sachliche, unmittelbar erfassbare Ausgestaltung.

16 Poetius 1728, S. 50

17 „Es muß aber niemand dencken, daß es mit dem also aufgeschriebenen Ein mahl Eins sein Bewenden hat, sondern, wer kurtz und öffters in mente etwas rechnen will, der muß es auswendig wissen...“ (Poetius 1728, S. 52)

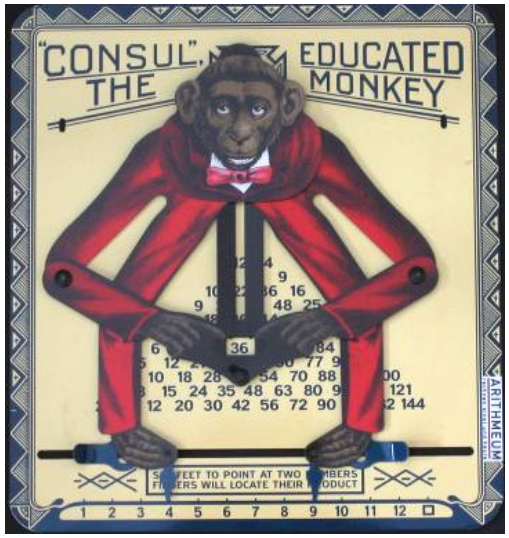


Quadratische Tafel mit beweglichem Eingang,
Tables intuitives Reumont, Frankreich, um 1900

Gleichzeitig kommen ab dem Ende des 19. Jahrhunderts vermehrt einfache Rechenspielzeuge auf den Markt, die als Unterstützung bei der Einübung der vier Grundrechenarten, damit auch dem kleinen Einmaleins, dienen.[18] An der Blechtafel im Bild kann die Zeile mit Produktfaktoren vertikal verschoben werden.

18 Rechengeräte als Spielzeug werden bereits in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erwähnt, s. Weiss, Stephan: Rechengeräte im Angebot bei Johann Conrad Gütle 1792 (2012) URL http://www.mechrech.info/publikat/GuetleReGer.pdf

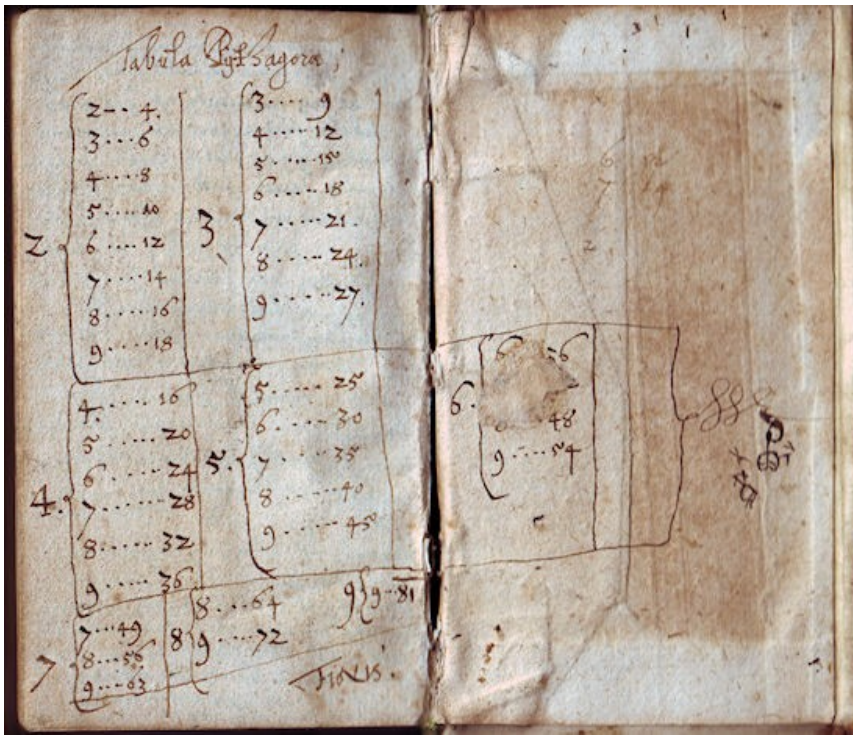
Eureka, D Patent 1889, F bis nach 1900



Consul the Educated Monkey, Patente USA 1916, GB 1918

Manche dieser Spielzeuge sind insoweit mechanisiert, als sie beim Einstellen der Produktfaktoren an zwei beweglichen Zeigern mit Hilfe eines kinematischen Getriebes einen weiteren Zeiger über die Zahl des Ergebnisses stellen.[19] Der Übergang von einer statischen Einmaleinstabelle zu einem Rechengerät ist nur ein kleiner Schritt.

19 Zu *Eureka* s. Rechnerlexikon URL http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Eureka
Zu *Consul the Educated Monkey* s. Rechnerlexikon
URL http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Consul



Einmaleins, handschriftlich nachgetragen in einer Tafel mit Winkelfunktionen von 1639

Das Bild zeigt ein handgeschriebenes Einmaleins als verkürzte Liste. Einer der Besitzer einer Tafel mit Winkelfunktionen von 1639 hat sie auf das letzte Blatt und den hinteren Buchdeckel eingetragen. Warum er das tat wissen wir nicht. Er betitelt die Liste mit *Tabula Pythagora* und vergisst auch nicht, sie mit *FINIS* zu beenden.

Juni 2015