Stephan Weiss

# Die symmetrische Multiplikation – Johann Georg Gottfried Seidel und sein Multipliziergerät

## Einleitung

Dieser Beitrags zur Geschichte des instrumentalen Rechnens stellt ausgewählte Methoden des schriftlichen Multiplizierens mit Zahlen vor, die heute nicht mehr verwendet werden. Verwöhnt von elektronischen Rechnern zu allen Zwecken und bei jeder Gelegenheit ist es heute kaum mehr vorstellbar, dass man in vergangenen Jahrhunderten Varianten des schriftlichen Rechnens mit dem Ziel der Vereinfachung erarbeitet hat. Aus einigen wurden zudem mechanische Rechenhilfen abgeleitet.
Der Weg zu einer dieser Multiplizierhilfen wird bis zum mutmasslichen Erfinder nachgezeichnet. Spätere Geräte, die diese Methode variieren, werden ebenfalls vorgestellt.

## Die Multiplikation mehrstelliger Zahlen

In der Ausführung des schriftlichen Multiplizierens zweier mehrstelliger Zahlen lassen sich zwei Verfahren unterscheiden. Das erste besteht aus dem Multiplizieren des einen mehrstelligen Faktors mit allen Ziffern des anderen nacheinander und dem folgenden Aufsummieren der Zwischenergebnisse. Im zweiten Verfahren werden die beiden mehrstelligen Faktoren unmittelbar multipliziert und das Ergebnis noch während der Rechnung aufgebaut. Das ebenfalls geübte Verfahren der Zerlegung der Faktoren in Summen vor der eigentlichen Multiplikation bleibt hier unberücksichtigt.

Die erste Art der Ausführung ist uns aus der Schulzeit bekannt. Bild 1 zeigt eine Methode dieses Verfahrens, wie sie Peter Apian (1495–1552) in seinem Lehrbuch über kaufmännische Arithmetik lehrt [2].

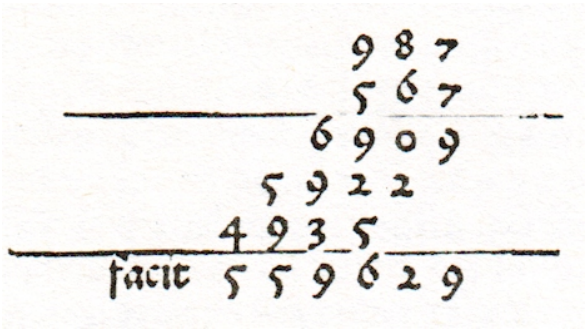



Bild 1: Multiplizierverfahren mehrstellig
mal einstellig bei Apian

In der gezeigten Aufgabe wird 987 mit 567 multipliziert. Die Produkte 987 × 7, 987 × 6 und 987 × 5 sind stellenrichtig untereinander geschrieben. Der zweite Produktfaktor 567 ist unter den ersten gesetzt und gibt an, wo die Einer der drei Zwischenergebnisse stehen müssenund hilft so bei deren richtiger Positionierung.

Die Mehrzahl der historischen Multiplizierhilfen ist auf die Multiplikation eines mehrstelligen Produktfaktors mit einem einstelligen eingerichtet. Der nur einstellige zweite Produktfaktor ermöglicht ihren einfachen Aufbau und eine geordnete Darstellung der Teilprodukte 0×0 bis 9×9 ohne grossen Aufwand. Unterschiede bestehen in der Darstellung der Teilprodukte und in der Ausführung der Zehnerüberträge von Teilprodukt zu Teilprodukt. Die bekanntesten Rechenhilfen dieser Art sind die Rechenstäbe von John Napier 1617 [27] und die von Genaille und Lucas 1885 [26]. Da über diese Rechenhilfen und ihre Varianten bereits umfangreiche Fachliteratur zur Verfügung steht sollen sie hier nicht nochmals beschrieben werden.

Das zweite Verfahren ist dadurch gekennzeichnet, dass in nur einem Rechengang unmittelbar alle Teilprodukte ermittelt und addiert werden. Es umfasst mehrere unterschiedliche Methoden. Das Ergebnis wird dabei, zumeist mit den Einern beginnend, Stelle für Stelle aufgebaut. Zur Verdeutlichung zeigt Bild 2 für zwei dreistellige Faktoren[1] $F_1$ und $F_2$ mit ihren Hunderterziffern h, Zehnerziffern z und Einerziffern e

$F_1 = 100 \times h_1 + 10 \times z_1 + e_1$

$F_2 = 100 \times h_2 + 10 \times z_2 + e_2$

welche Teilprodukte jeweils eine Stelle im Ergebnis bestimmen.

1 Hier werden Zahlen im Dezimalsystem vorausgesetzt. Die aufgezeigten Zusammenhänge gelten natürlich auch für andere Basiszahlen. Lüroth verallgemeinert die Ableitungen für beliebige Basiszahlen [15].

$$
\begin{aligned}
&(h_1*100 + z_1*10 + e_1) \; * \\
&(h_2*100 + z_2*10 + e_2) \; = \\
\\
&= 10^4*h_1h_2 \\
&+ 10^3*(h_1z_2 + h_2z_1) \\
&+ 10^2*(h_1e_2 + z_1z_2 + e_1h_2) \\
&+ 10^1*(z_1e_2 + e_1z_2) \\
&+ 10^0*e_1e_2
\end{aligned}
$$

Bild 2: Teilprodukte in der Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen

Die nach Zehnerpotenzen geordnete Auflistung des Produkts zeigt, dass die Einerziffer im Ergebnis vom Produkt der Einerziffern in den Faktoren bestimmt wird. Die Zehnerziffer des Ergebnisses wird bestimmt von der Summe der Teilprodukte Einerziffer des einen Faktors mal Zehnerziffer des anderen plus Zehnerziffer des einen mal Einerziffer des anderen Faktors plus ein eventueller Zehnerübertrag von vorher und so weiter.
Die Darstellung oben ist nur zur besseren Übersicht mit zwei dreistelligen Faktoren ausgeführt. Sie lässt sich leicht auf eine beliebige Zahl von Stellen generalisieren (s. dazu auch [15], S. 8). Es gilt nämlich

$(a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3+...) \times (b_0 + 10b_1 + 10^2b_2 + 10^3b_3+...) =$
$(c_0 + 10c_1 + 10^2c_2 + 10^3c_3+...)$ mit
$c_n = b_na_0 + b_{n-1}a_1 + b_{n-2}a_2... + b_0a_n$

Selbstverständlich führt die Ausführung des ersten Verfahrens mehrfach mehrstellig mal einstellig ebenfalls auf diese Darstellung, nur die Algorithmen der Multiplikation unterscheiden sich.

Gelehrt wird die unmittelbare Multiplikation zweier mehrstelliger Faktoren bereits in der indischen Mathematik und gelangt von dort über arabische Arbeiten nach Europa. Der italienische Mathematiker Luca Pacioli (1445–1517) fasst das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen und führt alle Methoden des Multiplizierens auf [17, 21, 23]. Zwei mit weitreichender Bedeutung werden hier vorgestellt.
Eine Variante der Multiplikation mehrstellig mal mehrstellig besteht in der Kreuzmultiplikation, die in Anhang 1 beschrieben ist. Sie kommt auch ohne das Zeichnen der Kreuze vor und wird von manchen späteren Autoren zu Recht als schwierig oder fehleranfällig bezeichnet. Eine Multiplizierhilfe konnte daraus nicht entstehen.
Bei der Umsetzung des Verfahrens mehrstellig mal mehrstellig in einem Recheninstrument besteht generell das Problem darin, dass für alle Stellen im Er-

gebnis die Summe gleichwertiger Teilprodukte aufaddiert werden muss unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Zehnerübertrags von der Stelle vorher.

Eine weitere schriftliche Methode der Multiplikation mehrstellig mal mehrstellig bedient sich der sogenannten Gittermethode. Sie ist in Anhang 2 beschrieben. Die Gittermethode stellt ein sehr altes Multiplizierverfahren dar. Wahrscheinlich in Indien entwickelt gelangte es sowohl nach China als auch über die Länder des Islam nach Europa [27]. Aus dieser charakteristischen Anordnung der Teiproduke hat der schottische Mathematiker John Napier (1550–1617) zwei Multiplizierhilfen entwickelt.

In Europa werden die Methoden des unmittelbaren Multiplizierens mehrstellig mal mehrstellig bis in das 16. Jahrhundert hinein gelehrt, dann schenkt man ihnen weniger Beachtung. Im 19. Jahrhundert wird das Verfahren als solches wieder aufgegriffen.
Im Jahr 1891 schreibt der Mathematiker Georg Cantor hierzu

> „Unter den vielerlei Multiplicationsmethoden, deren die Inder sich bedienten, und welche wahrscheinlich durch arabische Vermittelung nach Italien drangen, von wo sie sich weiter über ganz Europa verbreiteten, sind es besonders zwei gewesen, welche, als Gegensätze aufzufassen, unsere Aufmerksamkeit auch heute noch auf sich zu ziehen vermögen: die kreuzweise und die netzartige Multiplication. Jene schreibt gar kein Zwischenproduct, sondern gleich das endgiltige Ergebniss nieder; diese scheibt Alles, was nur überhaupt geschrieben werden kann, und verschmäht es nicht, das etwa zweiziffrige Product einer Multiplicatorstelle in eine solche des Multiplicanden ganz hinzuschreiben, anstatt die Zehnerziffer im Kopfe zu behalten. Wer der Meinung ist, die meisten Rechenirrthümer beruhen auf Schreibfehlern, der wird auch heute noch die kreuzweise Multiplication üben, welchen Herr Giesing neuen Eingang zu schaffen gesucht hat...“ [5]

Einen Auszug aus dem Lehrbuch von Michael Hausbäck aus dem Jahr 1833 [12] gibt Anhang 3. Der Verfasser lehrt den Algorithmus verbal und muss dabei die Anzahl der Stellen in den beiden Produktfaktoren berücksichtigen, was die Regeln der Durchführung nur verkompliziert. Seine Rechenanweisung für zwei dreistellige Faktoren entspricht genau der Darstellung in Bild 2 von Zeile zu Zeile, mit den Einern beginnend. In der Vorrede bezeichnet der Autor die vorgestellte Methode als seine Erfindung. Das ist natürlich nicht richtig. Später wird dieses Verfahren „symmetrische Multiplikation“ genannt [10]. Der Grund für diese Bezeichnung liegt im symmetrischen Auftreten der Stellenwerte aus beiden Produktfaktoren bei der Bestimmung der Ziffern im Ergebnis.

Anfang des 19. Jahrhunderts wird die Beschreibung einer neuartigen mechanischen Rechenhilfe für die unmittelbare Multiplikation mehrstelliger Zahlen publiziert. Sie ist insofern bemerkenswert, als sie sich nicht an den historischen Methoden orientiert.

## Johann G. G. Seidel und sein Multipliziergerät

Die Suche nach digitalisierter Literatur zur Geschichte des instrumentalen Rechnens im Internet führte mich zu einer weitgehend unbekannten Schrift. Die Titelseite ist in Bild 3 wiedergegeben. Sowohl Multiplikazion mit z als auch Rechnenmaschine sind antiquierte Wörter aus der Zeit erste Hälfte des 19. Jahrhunderts, die in anfänglicher Unkenntnis leicht übersehen werden.

Wenn der Titel auf eine neu erfundene Rechenmaschine hinweist wird das Interesse geweckt. Der Autor nennt seinen Namen nicht, er spricht von sich nur als dem Erfinder. Weiter gehende Informationen gibt das Lexikon

> Das gelehrte Teutschland oder Lexikon der jetzt lebenden teutschen Schriftsteller, 5. Aufl., 20. Bd. 1825.

Darin wird genannt

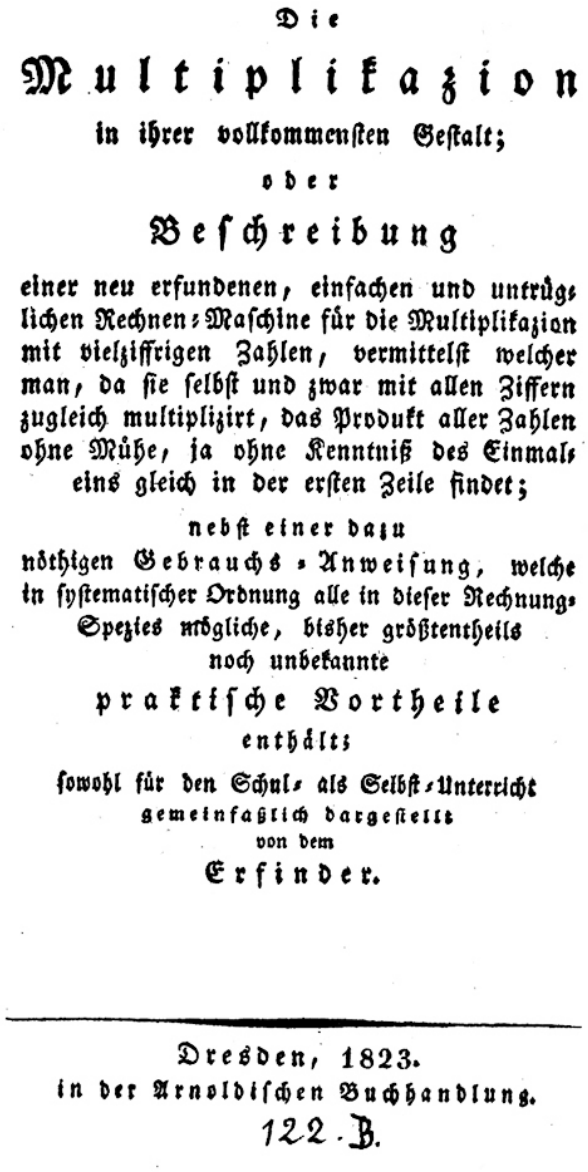
> SEIDEL (Johann Georg Gottfried) ältester Sohn von Joh. Heinr. S. Buchhalter im Adresscomptoir zu Dresden: geb. zu Koitzsch bey Trossin am 23 August 1773. §§. * Die Multiplikazion in ihrer vollkommenen Gestalt;... Dresd. 1823. 8.[2] [3]

Der Titel der Publikation ist im Lexikon vollständig zitiert. Die Zuordnung zum Autor erscheint vertrauenswürdig weil im Text bei Seidel mehrmals das „Königlich Sächsisch privilegierte Adress-Comptoir“ in Dresden genannt wird, auch weil man dort Seidels Instrument kaufen kann. Damit ist der Autor der Schrift zweifelsfrei bekannt. Im Handbuch der mathematischen Literatur von Rogg 1830 [19] ist das Werk ebenfalls aufgeführt, jedoch ohne Nennung des Autors. Spätere Buchkataloge zum Sachgebiet Mathematik nennen den Titel nicht mehr. Auch Poggendorff 1863 führt ihn nicht auf. Seidels Werk scheint schnell in Vergessenheit geraten zu sein.

---

2 Im Originaltitel wird der Superlativ vollkommensten gebraucht. Da Vollkommenheit einen Zustand bezeichnet, der sich nicht noch weiter verbessern lässt, gibt es keinen Superlativ am vollkommensten. In der Vorerinnerung zu seiner Schrift schreibt der Autor zunächst einfach
„Noch hat die gemeine Ziffern-Rechnenkunst oder die sogenannte Arithmetik bei Weitem nicht den Gipfel ihrer V o l l k o m m e n h e i t erstiegen, welcher darin besteht, das Resultat einer jeden Rechnung auf dem kürzesten Wege, der nur immer möglich ist, zu finden.“
Danach gibt er allerdings indirekt zu verstehen, dass seine Methode in Einfachheit und Schnelligkeit die bisherigen weit übertrifft. Man könnte zu dem Schluss kommen, dass er den Superlativ mit Absicht gebraucht hat.

3 „Adreß-Comptoir... Dabei handelte es sich um eine Vermittlungsstelle zwischen Kauf- und Verkaufsinteressenten – zeitweise vertrieb man auch Waren des täglichen Bedarfs.“ (aus Stadtwiki Dresden). Dazu auch
„Adressbüros waren Stätten der Informationsvermittlung, die den Zugriff auf die in der Unübersichtlichkeit der frühneuzeitlichen Städte verborgenen Ressourcen ermöglichen sollten und vorwiegend der Verkaufs-, Arbeits-, Immobilien- und Kapitalvermittlung dienten.“ [22]



Die

Multiplikazion

in ihrer vollkommensten Gestalt;

oder

Beschreibung

einer neu erfundenen, einfachen und untrüglichen Rechnen-Maschine für die Multiplikazion mit vielziffrigen Zahlen, vermittelst welcher man, da sie selbst und zwar mit allen Ziffern zugleich multiplizirt, das Produkt aller Zahlen ohne Mühe, ja ohne Kenntniß des Einmaleins gleich in der ersten Zeile findet;

nebst einer dazu nöthigen Gebrauchs-Anweisung, welche in systematischer Ordnung alle in dieser Rechnungs-Spezies mögliche, bisher größtentheils noch unbekannte

praktische Vortheile

enthält;

sowohl für den Schul- als Selbst-Unterricht gemeinfaßlich dargestellt von dem

Erfinder.

Dresden, 1823.
in der Arnoldischen Buchhandlung.

122. B.

Bild 3: Seidels *Multiplikazion*, Titelseite

Seidels Erfindung besteht aus zwei Komponenten: erstens die Bauweise des Rechengeräts einschliesslich der Anordnung der Produktfaktoren und zweitens die verwendeten Ziffern, deren Anzahl durch negative Ziffern vergrössert wird.

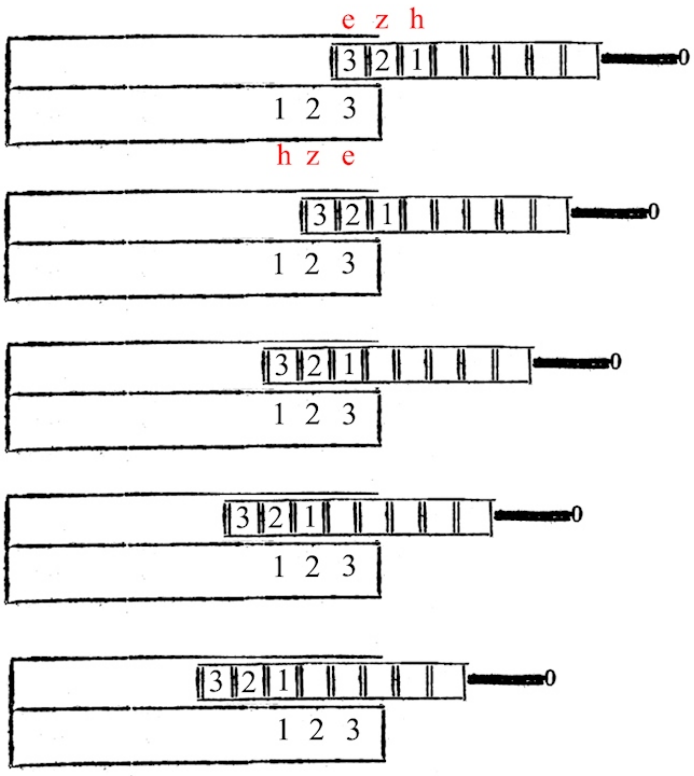



Bild 4: Seidels Multipliziergerät

Das Rechengerät ist sehr einfach aufgebaut. Es besteht lediglich aus einer feststehenden Tafel mit Führung und einer beweglichen Leiste mit Griff, die in der Führung verschoben wird. Auf beiden Bauteilen werden die Ziffern der Produktfaktoren in gleichen Abständen angebracht, entweder mit Hilfe von beschrifteten Täfelchen oder auf auswechselbare Papierstreifen geschrieben.
Bild 4 zeigt die Anordnung der Ziffern für das Produkt $123 \times 123 = 15129$.
Wichtig ist dabei, dass einer der Faktoren in umgekehrter Reihenfolge seiner Ziffern aufgebracht wird. Die roten Ergänzungen für Einer-, Zehner- und Hunderterziffer im Bild verdeutlichen diese Besonderheit.
Zum Gebrauch des Geräts schiebt man die Leiste von rechts nach links bis jeweils mindestens zwei Ziffern oben und unten gegenüber stehen. Im Beispiel sind das 5 Positionen. In jeder Position könnte man die sich gegenüber stehenden Ziffern multiplizieren und ihre Teilprodukte addieren. Man baut auf diese Weise die Ziffern des Ergebnisses wie in Bild 2 gezeigt vom Einer beginnend auf.

Eine Beispielrechnung wird an dieser Stelle nicht gegeben, weil eine Besonderheit bei Seidel hervorgehoben werden muss: er bestimmt die Ergebnisziffern nicht durch Multiplikation der Faktorenziffern. Stattdessen ist er der Meinung, er könne die Multiplikationen zweier Ziffern und damit das ganze kleine Einmaleins durch ein besonderes Verfahren fortgesetzter und abgekürzter Additio-

nen ersetzen. Die Beschreibung des ganzen Ersetzungssystems, und nur dieses, einschliesslich aller besonderer Fälle und Ausnahmen umfasst bei ihm 105 Seiten. Dabei kommen auch Zahlen mit negativen Ziffern[4] zum Einsatz. Letztere wurden von Zeit zu Zeit wiederholt vorgeschlagen, um bei Multiplikation und Division Vereinfachungen, oder zumindest was die Autoren dafür hielten, zu erzielen. So hatte Eduard Selling, Professor für Mathemaik an der Universität Würzburg, negative Ziffern mit neuen Zahlzeichen und sogar neuen Zahlwörtern im Gebrauch seiner Multipliziermaschine von 1887 vorgeschlagen und durchzusetzen versucht [25]. In Vorschlägen dieser Art wird übersehen, welchen zusätzlichen Aufwand das ungeübte Lesen und das Konvertieren der Zahlen mit sich bringt. Zudem gehören Zahlensysteme ebenso wie Längen- und Gewichtseinheiten zu den stabilen Kulturgütern, die sich in der Bevölkerung nur allmählich über Generationen hinweg verändern lassen.
Wie manch anderer Erfinder auch ist Seidel offensichtlich so von seiner Erfindung begeistert, dass er sie immer weiter ausarbeitet und dabei die Randbedingungen ausser Acht lässt. Sein Vorschlag, das Gerät und die Ersetzung des Einmaleins auch in Schulen einzuführen, hat sich zu unser aller Vorteil nicht durchgesetzt.

Von Seidel erfahren wir, dass er auch ein Divisionsgerät in Planung hatte, das ähnlich wie sein Multipliziergerät funktionieren sollte. Die angekündigte Beschreibung ist nie erschienen.

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass Seidel sein Gerät als Maschine bezeichnet. Damit bedient er sich des bis in das 19. Jahrhundert noch sehr weit gefassten Begriffsumfangs für Rechenmaschine[5], der erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts über das Vorhandensein eines automatischen Zehnerübertrags im Ergebnis, der bei Seidels Gerät fehlt, präzisiert wird [29].

## Die Priorität

Seidel bezeichnet seine Multiplizierhilfe in Verbindung mit der zugehörigen besonderen Rechenmethode als eigene Erfindung. Hinsichtlich der Rechenmethode allein hat er Unrecht. Was das Gerät selbst betrifft ist aus der Zeit vor Veröffentlichung seiner Schrift 1823 ein in der Funktion vergleichbares Gerät nicht überliefert. Der Hersteller und Vertreiber von Instrumenten Johann Conrad Gütle beschreibt in seinen Katalogen gegen Ende des 18. Jahrhunderts nichts

4 Ein Beispiel für negative Ziffern, sie sind in Klammern gesetzt, bei Seidel:
$2(2)2 = 2\times100 - 2\times10 + 2 = 182$.

5 Seidel definiert
„Denn unter Maschine verstehe ich jedes Kunstwerk, das nach irgend einem Gesetze der Mechanik gebraucht werden muß, oder dessen Anwendung auf irgend einer regelmäßigen Bewegung beruht, die das Verhältniß seiner Theile gegen einander verändert. Dadurch unterscheidet sich nämlich eine Maschine von einem bloßen Instrument oder Werkzeuge.“
[20], S. 116.

was Seidels Erfindung entspräche [28]. Johann Paul Bischoff, der sich bemüht hat, für seine Enzyklopädie von 1804 alle Rechengeräte und -maschinen aufzufinden, nennt ebenfalls nichts Vergleichbares [3]. Ebenso geben mathematische Wörterbücher aus der Zeit keinen Hinweis auf ein ähnliches Gerät. Insoweit muss man annehmen, dass die Priorität für ein Rechengerät der symmetrischen Multiplikation bei Seidel liegt. Aus welcher Quelle er seine Idee schöpfte oder ob sie originär von ihm selbst stammte lässt sich nach derzeitigem Kenntnisstand nicht festlegen. Der Umfang der Priorität selbst bedarf einer Präzisierung, denn es gibt Vorläufer.[6]

John Colson (1680-1760), Professor für Mathematik an der Universität Cambridge, veröffentlichte 1726 eine Arbeit über das Multiplizieren grosser Zahlen [7]. Er bedient sich dabei negativer Ziffern, die bei ihm überstrichen gekennzeichnet sind, sowie zweier Zettel, die er gegeneinander verschiebt. Auf einem steht der erste Produktfaktor, der bewegliche Multiplikator (*Moveable Multiplier*) mit umgekehrter Reihenfolge der Ziffern, auf dem zweiten der Multiplikand, der zweite Produktfaktor.[7] Dann verschiebt er einen der beiden Zettel gegen den anderen und addiert die Teilprodukte aller Ziffern, die sich gegenüber stehen. Bild 5 zeigt den Anfang der Multiplikation mit den Faktoren $8605729398715 \times 3894175836438$ bzw. $1\overline{1}4\overline{1}4\overline{3}3\overline{1}4\overline{0}\overline{1}3\overline{1}5 \times 4\overline{1}\overline{1}2\overline{2}4\overline{2}4\overline{4}4\overline{4}2$

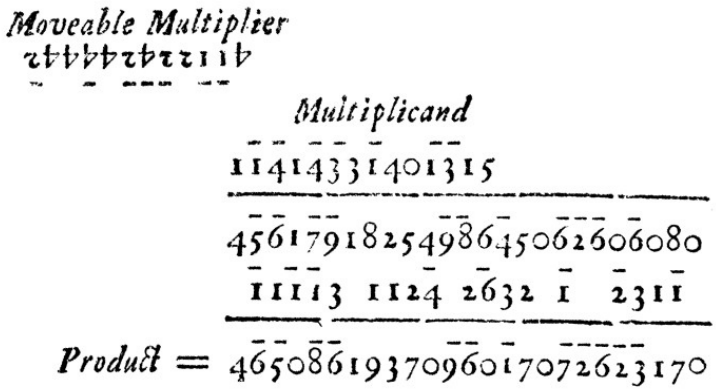



Bild 5: Symmetrische Multiplikation bei Colson

Hier beginnt die Multiplikation mit den höchsten Stellen in den Faktoren und benötigt wegen der im weiteren Verlauf noch kommenden Zehnerüberträge eine

6 William Oughtred beschreibt schon Mitte des 17. Jahrhunderts die Anordnung der beiden Faktoren übereinander, wobei in einem die Reihenfolge der Ziffern umgekehrt wird. Eine Verschiebung findet jedoch nicht statt. Die Anordnung dient vielmehr dazu ein angenähertes Ergebnis zu erzielen [16, S. 9].

7 Im Original: „Write down these two Numbers one under the other upon a flip of Paper, with the Figures at equal distances, and then cut them asunder. Take either of the Numbers for a Multiplier, and place it over the other in an inverted position, so as its first Figure may be just over the first Figure of the Multiplicand.“ [7, S. 165].

Notation der Zwischenergebnisse. Er führt auch das Verfahren, welches mit den Einerziffern beginnt, sowie die anderen Grundrechenarten mit negativen Ziffern vor.
Die Vereinfachung der Rechnungen soll darin bestehen, dass die höherwertigen Ziffern 9, 8, 7, 6 durch die niederwertigeren $1\overline{1}$, $1\overline{2}$, $1\overline{3}$, $1\overline{4}$ ersetzt werden. Mit diesen Ersetzungen könnte sich das kleine Einmaleins auf Produkte bis 5×5 beschränken, zusätzlich jedoch unter Berücksichtigung des Vorzeichens. Erschwerend kommt hinzu, dass er stets Zahlen mit positiven Ziffern in solche mit negativen Ziffern und umgekehrt konvertieren muss.
Colson erwähnt am Ende des Textes ein Rechengerät mit dem Namen *Abacus* oder *Counting-Table*, das er entwickelt hat und demnächst vorstellen will. Eine Beschreibung ist leider nie erschienen.

Die Verwendung zweier Blätter Papier, die Produktfaktoren tragen und deren Position gegeneinander beliebig verändert werden kann, stellt eine Mechanisierung des Zahlenrechnens dar, wenn auch auf einfacher Stufe. Sie bietet eine stets wechselnde Sicht auf Konfigurationen, die sich durch Notation allein nicht erzielen lässt. Der Vorteil der Erfindung Seidels liegt darin, dass er dieses Prinzip als Gerät realisiert, welches eigenständig existiert und wiederverwendbar bleibt.

Im 19. Jahrhundert ist die Verwendung zweier Papierstücke nach wie vor bekannt, wie die folgenden Quellen belegen.
In der deutschen Übersetzung des Werkes des französischen Mathematikers und Physikers Jean Baptiste Fourier (1768-1830) *Analyse des équations déterminées* aus dem Jahr 1831 macht der Herausgeber und Mathematiker Alfred Loewy eine interessante Anmerkung [9, S. 262]. Er schreibt

> „61) Zu S. 183. Die hier von Fourier gelehrte Multiplication heisst symmetrisch... Soweit wir wissen, war Fourier der erste europäische Mathematiker, in dessen Werken man für die symmetrische Multiplication die practische Anweisung findet, die zwei Zahlen auf zwei separate Blätter, und zwar die Ziffern der einen in verkehrter Ordnung, zu schreiben...“

Fouriers Erläuterungen des Verfahrens sind nicht eindeutig klar. Wenn er jedoch die beiden Produktfaktoren auf zwei Blätter schreibt kann das nur zum Zweck des Verschiebens der beiden gegeneinander dienen. Für eine statische Kreuzmultiplikation braucht man keine zwei Blätter. Lüroth kommentiert die Methode des Multiplizierens bei Fourier dahingehend, dass die beiden Faktoren, einer von ihnen mit umgekehrter Anordnung seiner Ziffern, tatsächlich mit Hilfe von Papierstreifen gegeneinander verschoben werden [15]. Jedoch addiert Fourier die Teilprodukte nicht als Ganzes, er addiert nur deren Einerziffern und schlägt die Zehnerziffern eben dieser Teilprodukte der nächsten Summenbildung zu. Letztendlich ist es unerheblich, wie die Teilprodukte addiert werden. Entscheidend an diesem Verfahren bleibt das manuelle Verschieben der Faktoren gegeneinander.

Der französische Mathematiker Augustin Louis Cauchy schreibt 1840, man könne für diese Art der Multiplikation ein Lineal oder ein Papierband verwenden [6, S. 437].

Im Jahr 1885 spricht Cantor in einer Rezension des Werkes von Giesing 1884, auf dessen Rechenapparat weiter unten eingegangen wird, ebenfalls die symmetrische Multiplikation mit Hilfe eines zweiten bewegten Zettels an [11]. Er schreibt dazu, er habe dieses Verfahren im Wintersemester 1849/50 an der Universität Göttingen bei Professor M. Stern[8] kennen gelernt. Von einem Multiplizierergerät gleicher Bauart vor Giesing schreibt Cantor nichts.

Im Jahr 1863 schlägt William Henry Oakes in einem Artikel eine Methode des Multiplizierens vor, die, wie er sie nennt, im Kopf ausgeführt werden könnte [30]. Es handelt sich dabei um die symmetrische Multiplikation, er nennt sie nur nicht so. Das beigefügte Rechenbeispiel ist ausführlich dargestellt und in Anhang 5 wiedergegeben.

Daraus lässt sich folgern, dass das symmetrische Multiplizieren mit Hilfe gegeneinander verschieblicher Faktoren, wobei bei einem die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge notiert sind, zumindest ab 1730 bis wenigstens 1900 in Fachkreisen bekannt und geläufig gewesen sein muss.

Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts werden mehrere Multipliziergeräte entworfen und angeboten, die auf dem Prinzip der symmetrischen Multiplikation mit gegeneinander verschiebbaren Faktoren aufbauen.

## Spätere Multipliziergeräte

Zu diesen frühen Geräten zählt Poppes *Arithmograph*, beschrieben in Dinglers Polytechnischem Journal von 1877 [31]. Von dort ist das Bild 6.1 entnommen. Vielfachenstäbe für die Ziffern 0 bis 9 werden im Kasten C aufbewahrt. Diese Stäbe tragen von oben nach unten die Produkte der Kopfzahl mit 9 bis 1. Die Ziffern dieser Teilprodukte sind an den Rand der Stäbe gesetzt, damit sie mit einer Ziffer auf dem benachbarten Stab optisch eindeutig verbunden werden können. Die Anordnung der Ziffern — Einerziffern links und Zehnerziffern rechts wie hier oder umgekehrt — hängt davon ab, in welcher Richtung der zweite Produktfaktor über den ersten versetzt wird.
Für das Rechenbeispiel $907 \times 83 = 75281$ aus Grafs Artikel legt man zunächst den Faktor 83 in umgekehrter Reihenfolge der Ziffern, also als 38, bei der Anlage A auf.[9]

---

8 Moritz (auch Moriz) Abraham Stern (1807-1894) lehrte bis 1884 in Göttingen.

9 Die Anmerkung bei Graf, diese Umkehrung der Ziffernfolge habe mit der Theorie des Multiplikationsapparates nichts zu tun, sondern geschehe nur aus Gründen, welche durch die gewünschte Handlichkeit sich ergeben, ist nicht richtig.

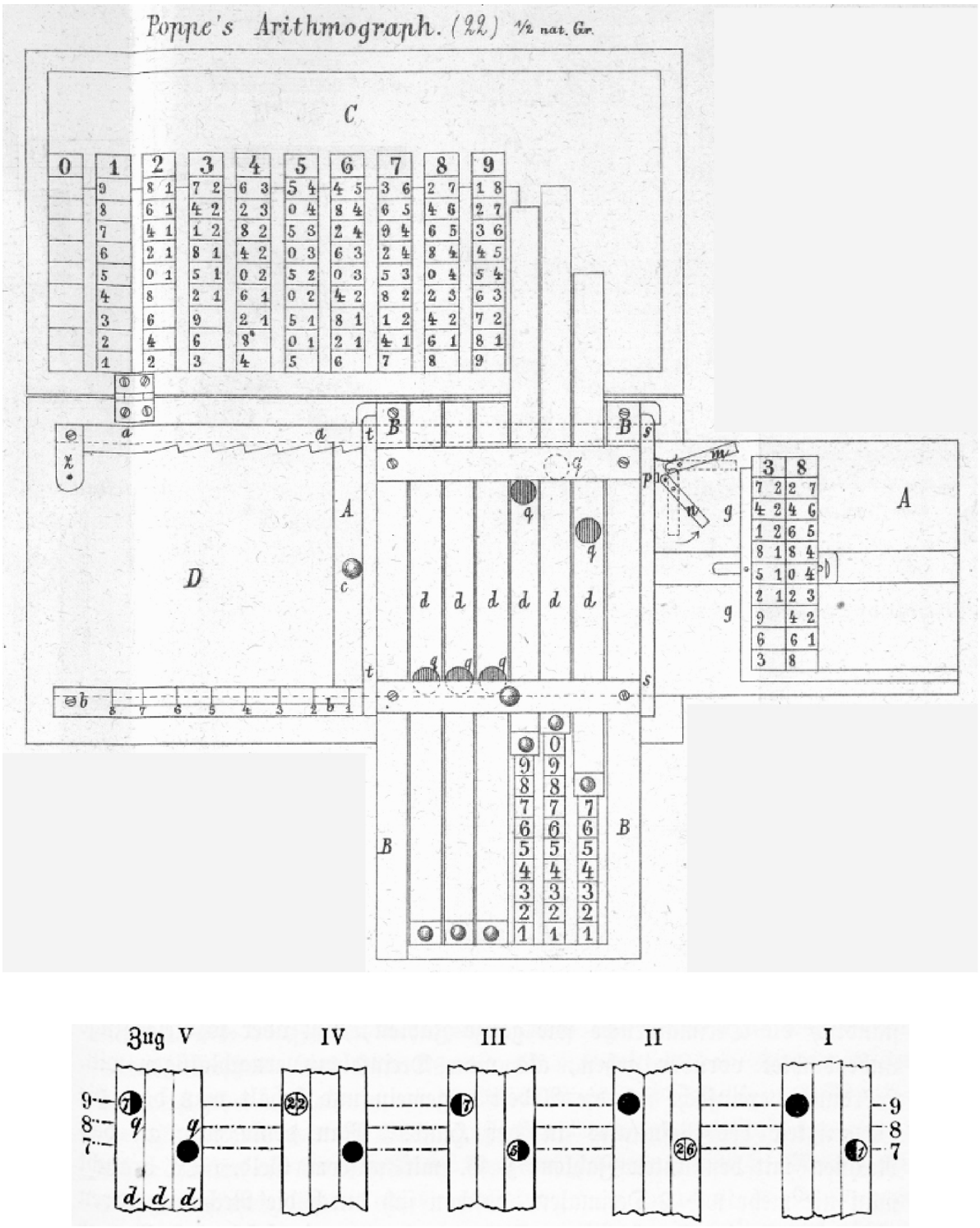



Bild 6.1: Poppes Arithmograph,
oben: das Gerät,
unten: Stellungen des Rechenbeispiels

Auf dem Schieber B wird der zweite Produktfaktor durch senkrechtes Verschieben von Leisten mit Schauöffnungen eingestellt. Diese Schauöffungen stehen dann auf Höhe der Teilprodukte auf den Stäben und geben den Blick auf zwei benachbarte Ziffern auf zwei Stäben frei.
Sodann verschiebt man den Schieber von links nach rechts über die aufgelegten Stäbe, liest in jeder Stellung die angezeigten Ziffern ab und addiert diese. Die Summen ergeben jeweils eine Ziffer im gesuchten Ergebnis. Das genannte Rechenbeispiel bringt am Arithmographen Anzeigen hervor, wie sie in Bild 6.1 unten dargestellt sind. Der Verfasser des Artikels erläutert dazu in Fussnote 2

Das Product 907 × 83 ergibt nachfolgende Theilproducte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 Einheiten | × 3 | Einheiten | | 00021 |
| Zehner | × 3 | „ | | 0000 |
| 9 Hunderter | × 3 | „ | | 027 |
| 7 Einheiten | × 8 | Zehner | | 0056 |
| Zehner | × 8 | „ | | 000 |
| 9 Hunderter | × 8 | „ | | 72 |
| | | | | ——— |
| | | Summe | | 75281 |

Es entsprechen somit die einzelnen Züge

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Zug | I | = | Summe | aller Einheiten |
| „ | II | = | „ | „ Zehner |
| „ | III | = | „ | „ Hunderter |
| „ | IV | = | „ | „ Tausender |
| „ | V | = | „ | „ Zehntausender. |

Nur drei Jahre später, 1880, veröffentlicht John Bridge die Beschreibung eines Multiplizierapparates mit einer zum Arithmographen fast identischen Funktion [32]. Bild 6.2 zeigt seine Abbildungen dazu. In der Einleitung bezieht er sich auf die Rechenstäbe von Napier und will zeigen, dass diese noch weitere Möglichkeiten ihrer Verwendung als bisher geben können. [10]
Der Artikel von Bridge ist ausführlich gehalten und lesenswert, weil er auch auf die Verwendung eines solchen Apparates für Division und Quadratwurzel eingeht.

10 Vielfachentabellen mit Produkten des kleinen Einmaleins wurden häufig als Rechenstäbe nach Napier bezeichnet, obwohl deren Anordnung der Produktziffern nichts mehr mit der charakteristischen Anordnung wie bei Napier zu tun hat.

Phil. Mag. S. 5. Vol. 9. Pl. VI.

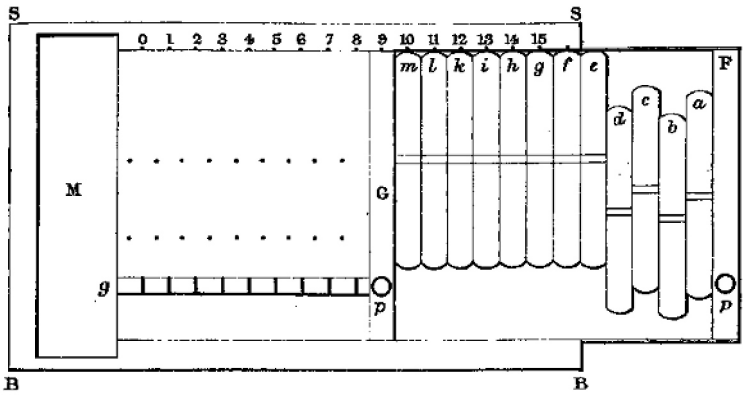



Fig. 1. Scale. $\frac{1}{4}$.

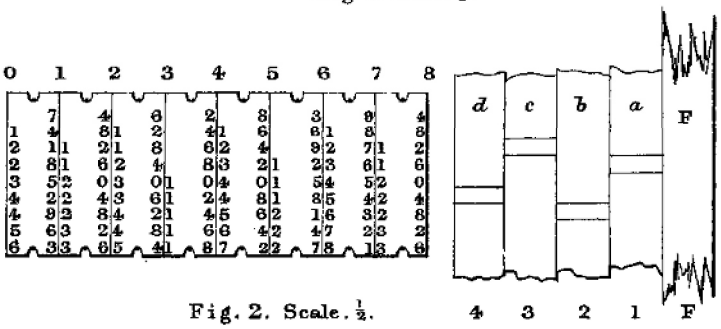



Fig. 2. Scale. $\frac{1}{2}$.

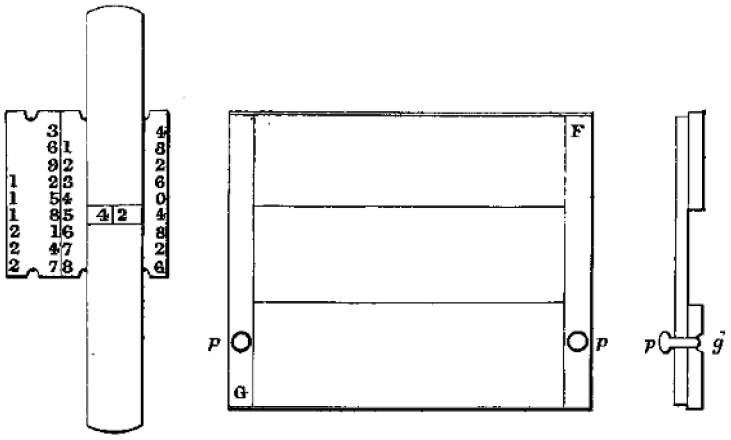



Fig. 4. Scale. $\frac{1}{2}$.

Fig. 3. Scale. $\frac{1}{4}$

Bild 6.2: Der Multiplizierapparat von Bridge

Im Jahr 1883 erhält Karl Julius Giesing ein deutsches Patent auf einen Rechenaparat [8], Anhang 4 zitiert den Patentanspruch. Im gleichen Jahr erscheint sein *Neuer Unterricht in der Schnellrechen-Kunst* einschliesslich der symmetrischen Multiplikation, der im 2. Teil auch eine Beschreibung seiner Erfindung enthält [11]. Im Jahr 1886 bringt Dinglers Polytechnisches Journal eine weitere Beschreibung des Geräts [1].

Giesing (1848–1907) war als Lehrer für Sprachen, Mathematik und Physik, später als Direktor an Realschulen tätig [14] und somit mit den Verfahren des numerischen Rechnens bestens vertraut.

Der Kern seines Entwurfs besteht darin, dass er wie schon die zuvor genannten Erfinder die symmetrische Muliplikation mechanisiert. Die beiden zu multiplizierenden Zahlen werden auf ein festes und ein bewegliches Element geschrieben und gegeneinander verschoben. Bild 6 zeigt das Rechenbeispiel $352 \times 436$. Der Faktor 352 steht auf der Grundplatte A, der Faktor 436 wird mit umgekehrter Anordnung als 634 auf dem beweglichen Schieber C notiert.

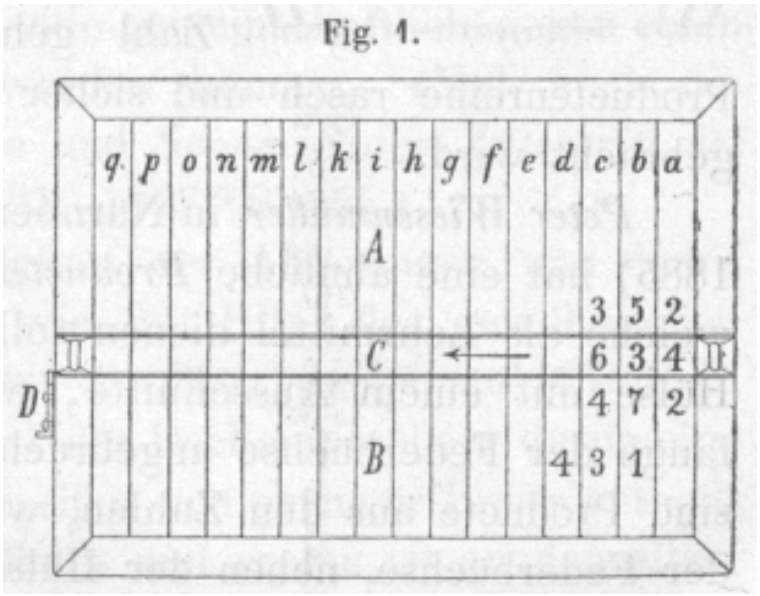



Bild 6.3: Der Rechenapparat von Giesing

Man bewegt den Schieber von rechts über die Grundplatte. In jeder Position, in der sich je zwei Ziffern gegenüber stehen werden ihre Teilprodukte berechnet und addiert und ergeben mit einem eventuellen Übertrag von vorher eine Ziffer im Ergebnis.

Die Rechnung in Bild 6 läuft in folgenden fünf Schritten ab:

| | Position | Rechnung | Ziffer Ergebnis | Übertrag |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 5 2<br>← 6 3 4 | 2×6=12 | 2 | 1 |
| 2 | 3 5 2<br>6 3 4 | 1+6×5+3×2=37 | 7 | 3 |
| 3 | 3 5 2<br>6 3 4 | 3+6×3+3×5+4×2=44 | 4 | 4 |
| 4 | 3 5 2<br>6 3 4 | 4+3×3+4×5=33 | 3 | 3 |
| 5 | 3 5 2<br>6 3 4 | 3+4×3=15 | 5 | 1 |
| | | | 1 | |

Das Ergebnis: $352 \times 436 = 153472$
Zwischenergebnisse können in die mit Kleinbuchstaben markierten Spalten, die auf der Grundplatte angebracht sind, notiert werden.
Ebenso wie Seidel greift auch Giesing auf negative Ziffern zurück:

> „Um gößere Summen der zu addirenden Producte zu vermeiden, erhöhe man zuweilen die vor einer 8 oder 9 stehende Zahl um eine Einheit und setzte an Stelle jener Zahlen $\overline{2}$ bezw. $\overline{1}$, wodurch angedeutet werden soll, daß die durch Multiplication mit $\overline{2}$ oder $\overline{1}$ entstandenen Producte zu subtrahiren sind.“ [8, S. 2 ob.]

So ersetzt er beispielsweise den Faktor 5396 durch $54\overline{1}6$. Unbedingt notwendig für den Rechengang sind Zahlen mit negativen Ziffern nicht.
Die symmetrische Division basiert ebenfalls auf einem von Fourier gelehrten Verfahren und unterscheidet sich wesentlich vom üblichen, weil nicht der ganze Divisor sondern nur einige Ziffern berücksichtigt werden [15, S. 38ff][11]. Giesing gibt in der Patentschrift je ein ausführliches Rechenbeispiel für die Division und die Berechnung der Wurzel mit Hilfe seines Geräts.
Eine gebaute Ausführung des Multipliziergeräts ist mir nicht bekannt.

Zu den wenigen tatsächlich gebauten Multiplizierhilfen für die symmetrische Multiplikation gehört das Taschengerät *Multor* oder *Multirex* der Fa. Ludwig Spitz & Co. in Wien. Das Gerät wurde Anfang des 20. Jahrhunderts im Handel angeboten. Die ebenfalls verwendeten Bezeichnungen Universalrechner oder Zauberapparat sind nichts anderes als Werbeaussagen zu werten, die die Tauglichkeit übergross hervorheben sollen.

11 Unger misst gegen Ende des 19. Jahrhunderts Fouriers Regel der geordneten Division keinen praktischen Wert bei und führt sie nur „des historischen Interesses wegen“ auf [24].

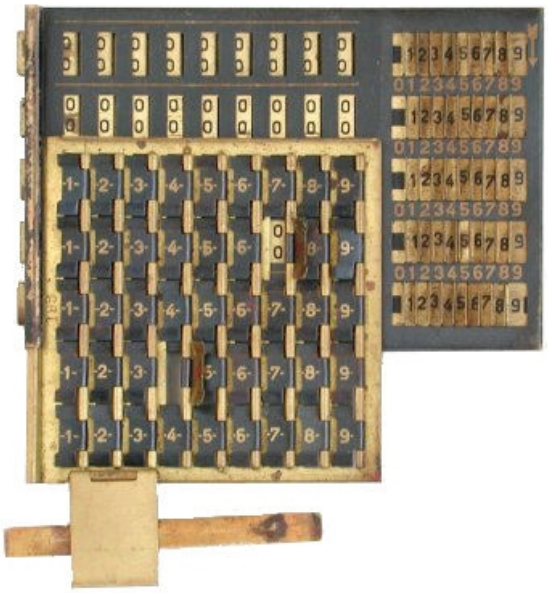


Bild 7: *Multor* oder *Multirex*

Das Gerät ist mit 13 x 8 cm klein gebaut und besteht aus einem unteren festen Teil, über dem sich ein verschiebliches Teil senkrecht bewegen lässt (Bild 7). Ein Stab, im Bild ganz unten angebracht, erleichtert die Einstellung der Zahlen.

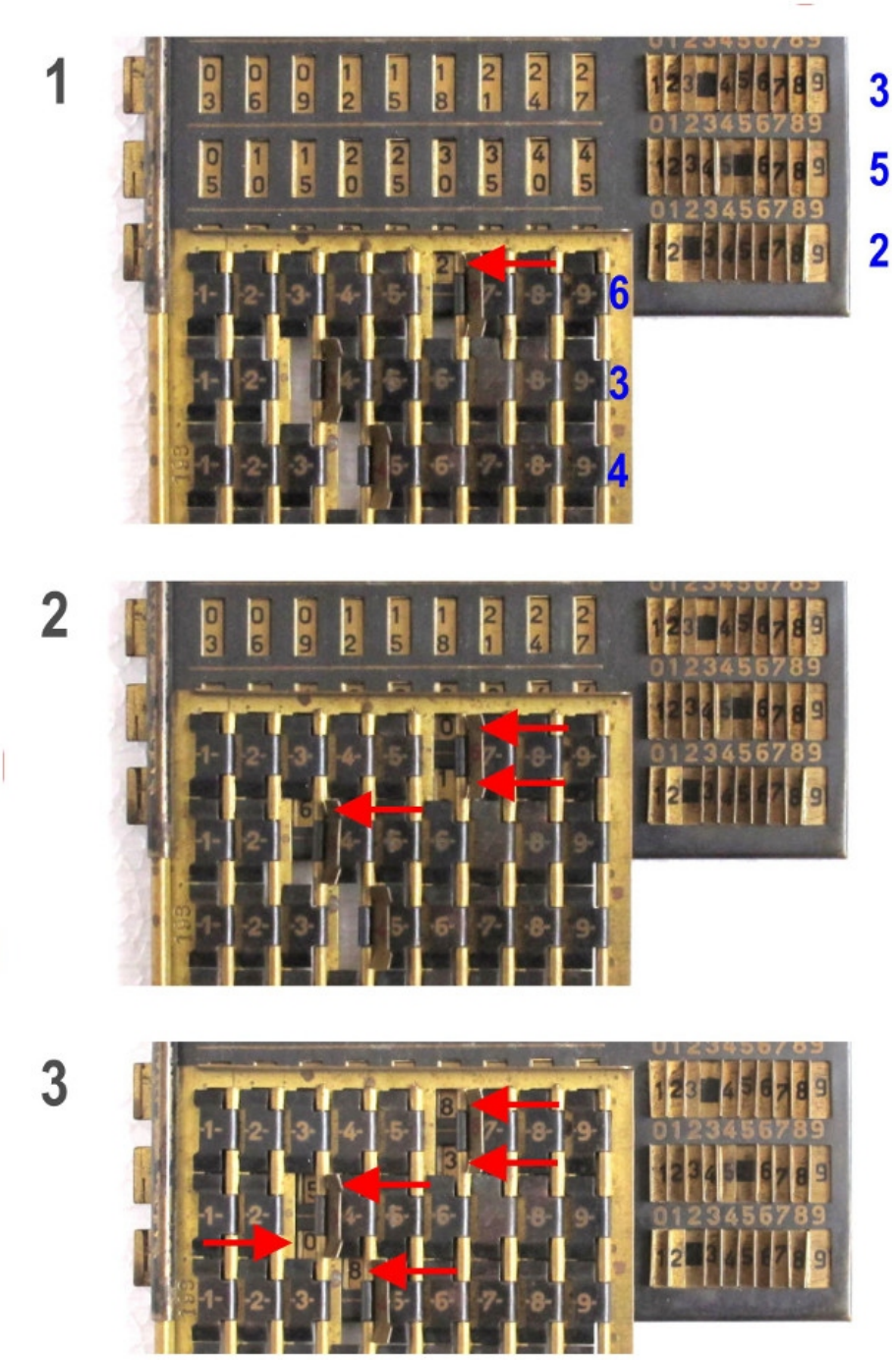



Bild 8: *Multor*, die ersten drei Stellungen für 352 × 436

Für die Multiplikation wird einer der Produktfaktoren rechts an den Schiebern in der Grundplatte eingestellt. Damit erscheinen nebeneinander die 1- bis 9-fachen dieser Ziffer. Den zweiten Faktor stellt man auf dem beweglichen Teil

ein, indem man kleine Fensterchen, die mit den Ziffern 1 bis 9 markiert sind, aufklappt. Sie geben die Sicht auf die darunter liegenden Vielfachenreihen frei. Zur Verdeutlichung ist in Bild 8 nochmals die Rechnung $352 \times 436$ mit den Faktoren in blau und in den ersten drei Stellungen von oben nach unten dargestellt. Im Gegensatz zum Patent von Giesing werden die Ziffern der Faktoren nicht multipliziert. Stattdessen zeigt das Gerät in jeder Stellung des oberen beweglichen Teils alle Ziffern jener Teilprodukte, die addiert eine Ziffer des Ergebnisses ergeben. Der Benutzer muss nicht multiplizieren, sondern nur die gezeigten Ziffern und eventuelle Überträge von vorher addieren. Damit geht dieses Gerät in der Vereinfachung des Rechnens noch einen Schritt weiter über das von Giesing hinaus.
Die nachfolgende Aufstellung zeigt von rechts nach links alle Schritte der Multiplikation $352 \times 436$ mit den zugehörigen Teilprodukten und den in jeder Stellung angezeigten Ziffern der Teilprodukte.

| **Schritt →** | 6 | 5 | 4 | **3** | **2** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Teilprod. ↓** | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
| $2 \times 6$ | | | | | 1 | 2 |
| $6 \times 5$<br>$3 \times 2$ | | | | 3 | 0<br>6 | |
| $6 \times 3$<br>$3 \times 5$<br>$4 \times 2$ | | | 1<br>1 | 8<br>5<br>8 | | |
| $3 \times 3$<br>$4 \times 5$ | | 2 | 9<br>0 | | | |
| $4 \times 3$ | 1 | 2 | | | | |
| **Ergebnis →** | 1 | 5 | 3 | 4 | 7 | 2 |

Gleichartig in der Funktion ist das Rechengerät *La Multi* französischer Herkunft, das in den 20iger Jahren des letzten Jahrunderts angeboten wurde (Bild 9). Eine zeitgenössische Beschreibung findet sich im Journal *La Nature* aus dem Jahr 1920 [4]. Hier wird der bewegliche Rahmen waagerecht verschoben. Wegen seiner Grösse ist es für den stationären Gebrauch auf dem Arbeitstisch vorgesehen.

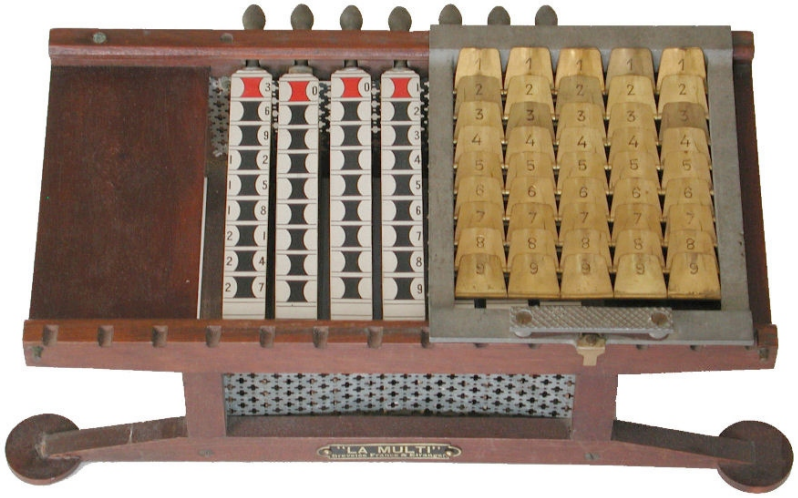


Bild 9: *La Multi*

Über den Verkaufserfolg der beiden letzten kommerziellen Geräte lässt sich nur sagen, dass er wegen der fehlenden wiederholten Aufmerksamkeit in der zeitgenössischen Literatur nicht sehr gross gewesen sein kann.
Weder die Erfinder noch die Produzenten der Geräte geben irgendwelche Hinweise auf Vorläufer dieses Prinzips.

•=•=•=•=•=•

## Anhang 1: Die Kreuzmultiplikation bei Pacioli

Pacioli zählt die Kreuzmultiplikation als vierte Methode des Multiplizierens auf. Er nennt sie *crocetta* (kleines Kreuz) oder *casella* (kleines Haus, auch Schubfach), im Original *De .4°. mõ multiplicandi dicto crocetta siue casella.* Bild 10 zeigt die Ausführung für 456 × 456. Die Reihenfolge der Teilmultiplikationen ist darin nachträglich mit blauen Zahlen markiert.

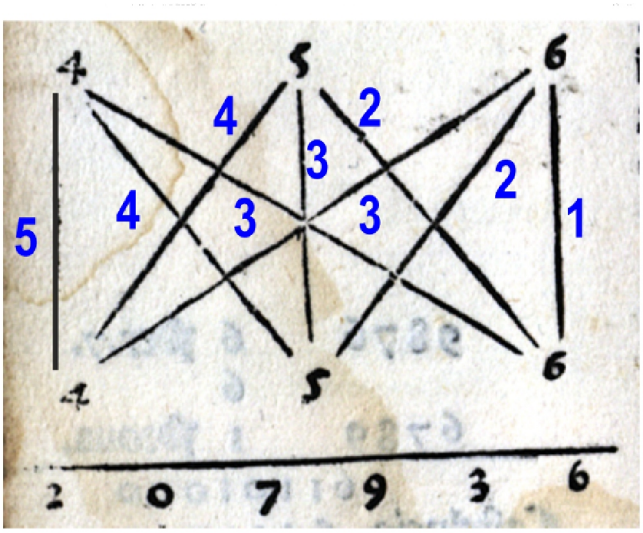



Bild 10: Die Kreuzmultiplikation bei Pacioli

Die Rechnung läuft wie folgt ab:

| | Stelle im Ergebnis | Teilprodukte | Ziffer Ergeb. | Übertrag |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $10^0$ | $6 \times 6 = 36$ | 6 | 3 |
| 2. | $10^1$ | $3 + 5 \times 6 + 5 \times 6 = 63$ | 3 | 6 |
| 3. | $10^2$ | $6 + 4 \times 6 + 4 \times 6 + 5 \times 5 = 79$ | 9 | 7 |
| 4. | $10^3$ | $7 + 4 \times 5 + 4 \times 5 = 47$ | 7 | 4 |
| 5. | $10^4$ | $4 + 4 \times 4 = 20$ | 20 | – |

Das Ergebnis: $456 \times 456 = 207936$

## Anhang 2: Die Gittermethode des Multiplizierens

Die Gittermethode des Multiplizierens ordnet beide Produktfaktoren an den Seiten eines Rechtecks an, das wiederum in kleine Quadrate geteilt ist. Bild 11 zeigt die Gittermethode, auch *gelosia* oder *graticola* genannt, wie sie bei Pacioli für die Rechnung 987 × 987 dargestellt ist. Übersichtlicher mit klarer Abgrenzung zum Ergebnis ist die Darstellung in Bild 12 bei Regius [18]. Hier sind die Stellen der Produktfaktoren 468 und 246 zur Verdeutlichung nachträglich rot markiert. Die Quadrate sind zudem von diagonalen Linien geteilt.



Bild 11: Die Gittermultiplikation bei Pacioli




Bild 12: Die Gittermultiplikation bei Regius

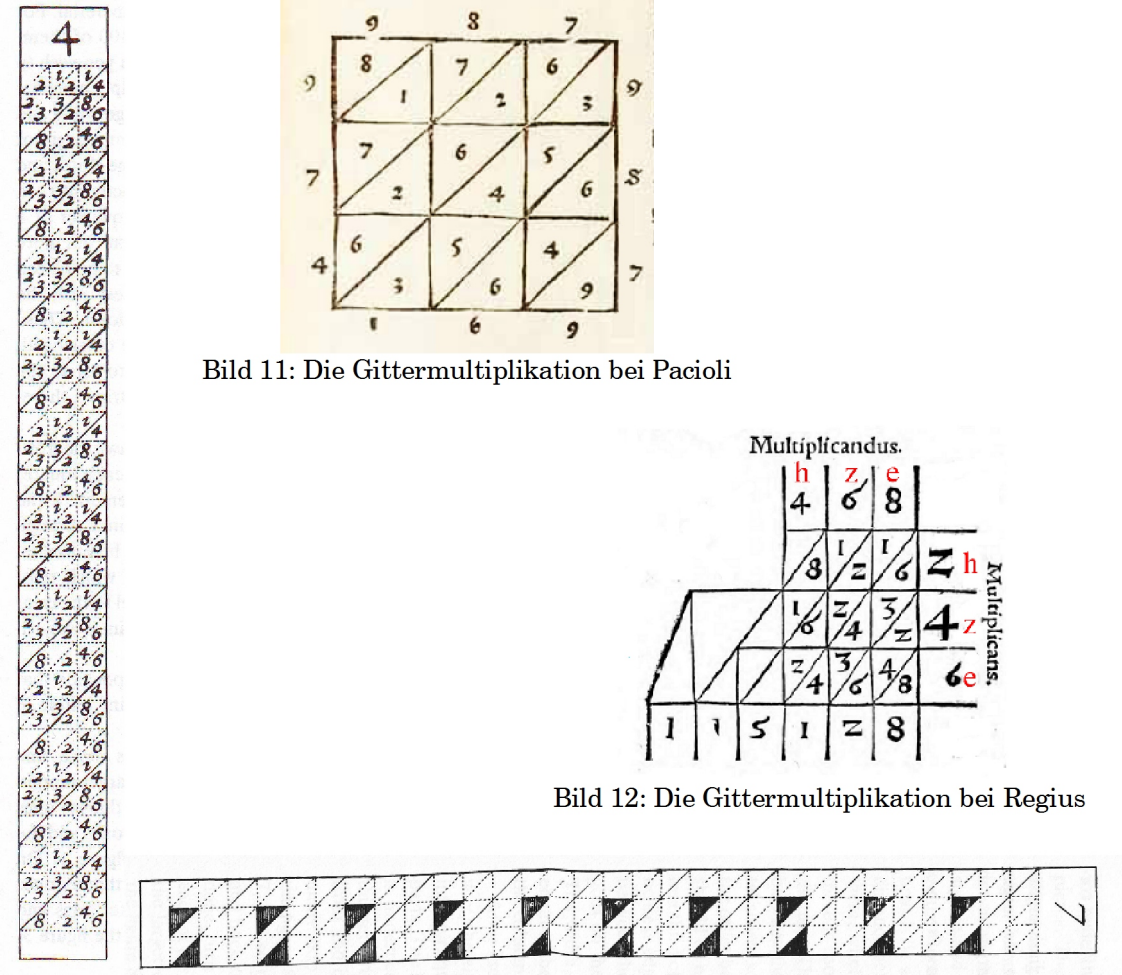


Bild 13: Links und unten ein waagerechter und ein senkrechter Streifen aus dem *Promptuarium* von Napier

Nach dem Anschreiben der Produktfaktoren wird in jedes Quadrat das Teilprodukt der beiden aussen stehenden Ziffern eingeschrieben. Die Ziffern des Teilprodukts sind von diagonalen Linien getrennt. Als nächstes werden, ganz rechts mit den Einern beginnend, alle Ziffern einer Diagonalen zusammengezählt. Die

Einerziffer eines jeden Zwischenergebnisses bildet eine Ziffer im gesuchten Ergebnis, die Zehnerziffer kommt als Übertrag zur nächsten diagonalen Addition. Eine symmetrische Anordnung mit den Produktfaktoren oben und links statt rechts sowie mit Diagonalen, die von rechts oben nach links unten verlaufen kommt ebenfalls vor.

Napier hat aus dieser zweidimensionalen Anordnung aller Teilprodukte zwei Multiplizierhilfen entwickelt. Es sind dies seine bekannten Multiplizierstäbe der *Rabdologia* (Stabrechnung) für die Multiplikation einer mehrstelligen mit einer einstelligen Zahl sowie das *Promptuarium Multiplicationis* für das Multiplizieren zweier mehrstelliger Zahlen. Letzteres besteht aus waagerechten und senkrechten Streifen, die übereinander gelegt, die Anordnung der Gittermultiplikation abbilden (Bild 13) [13, 27].

## Anhang 3: Eine neue Art mit Zahlen zu multipliziren

Quelle: Hausbäck, Michael [12], 1833, S. 10

„Bey der Multiplikation mit 3 Ziffern im Multiplikator und im Multiplikand, werden 5 oder 6 Ziffer im Produkte, und man erhält

1) Die Einheiten erhält man, indem man Einheit mit Einheit multiplizirt, die Einheiten, oder wenn sie mangeln, eine Null anschreibt, und sich die Zehner für den nächsten Platz aufbewahrt.

2) Die Zehner erhält man, indem man die Einheiten des Multiplikators mit den Zehnern des Multiplikands und die Zehner des Multiplikators mit den Einheiten des Multiplikands multiplizirt, und zur Summe beider Produkte die in Nro. 1 gebliebenen Zehner addirt (man kann die in Nro. 1 gebliebenen Zehner, um sie nicht zu vergessen, auch gleich zum ersten Produkte addiren und dann das andere Produkt hinzuaddiren.) Man schreibt dann die Zehner an, und spart sich die Hunderter für den nächsten Platz auf.

3) Die Hunderter erhält man, indem man die Einheiten des Multiplikators mit den Hundertern des Multiplikands und die Zehner des Multiplikators mit den Zehnern des Multiplikands, und die Hunderter des Multiplikators mit den Einheiten des Multiplikands multiplizirt, und zur Summe von diesen drei Produkten die in Nro. 2 gebliebenen Hunderter addirt. Man schreibt dann die Hunderter an, und behält sich die Tausender für den nächsten Platz.

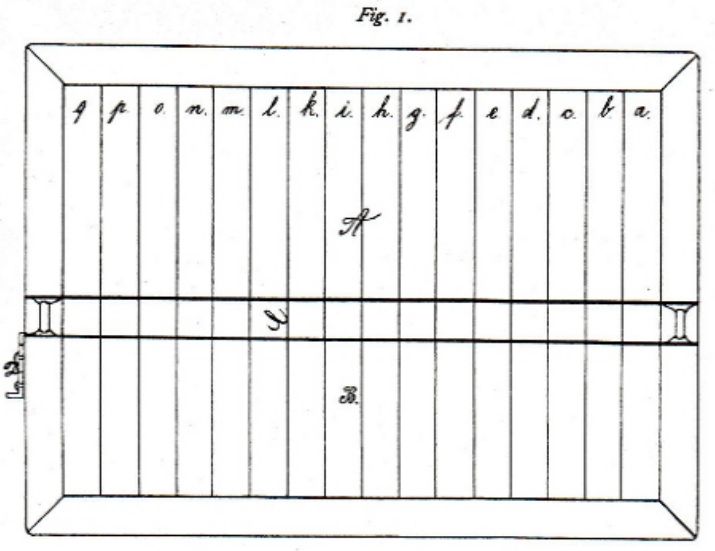
4) Die Tausender erhält man, indem man die Zehner des Multiplikators mit den Hundertern des Multiplikands, und die Hunderter des Multiplikators mit den Zehnern des Multiplikands multiplizirt, und zur Summe beider Produkte die in Nro.3 gebliebenen Tausender addirt. Man schreibt die Tausender an, und behält sich die Zehntausender für den nächsten Platz.

5) Die Zehntausender erhält man, indem man die Hunderter des Multiplikators mit den Hundertern des Multiplikands multiplizirt, und die in Nro. 4 gebliebenen Zehntausender dazu addirt.“

| | |
|---|---|
| I. Beyſpiel. 364. 364. 132,496. | 1) 4 mal 4 iſt 16, — 6 an, bleibt 1.<br>2) 4 mal 6 iſt 24, und 1 iſt 25, u. 24 iſt 49, — 9 an, bleibt 4.<br>3) 4 mal 3 iſt 12, u. 4 iſt 16, u. 36 iſt 52, u. 12 iſt 64, — 4 an, bleibt 6.<br>4) 6 mal 3 iſt 18, und 6 iſt 24, u. 18 iſt 42, — 2 an, bleibt 4.<br>5) 3 mal 3 iſt 9, u. 4 iſt 13. |

## Anhang 4: Patentschrift DE26107

Der Titel der Patentschrift: C. Julius Giesing in Döbeln: Rechenapparat. Patentirt im Deutschen Reiche vom 31. Juli 1883 ab (Auszug):




PATENT-ANSPRUCH:
Ein Rechenapparat in Gestalt einer Tafel mit zwei festliegenden , durch Gerade in Colonnen eingetheilten Schreibflächen *A* und *B* für Aufgabe und Resultat und einer zwischen diesen eingefügten horizontal oder kreisförmig verschiebbaren Leiste *C* bezw. Ringe mit Schreibfläche für den Multiplicator bezw. Divisor.

Durch Verschieben dieser Leiste *C* in gleichen, durch die Entfemung der Ziffern bestimmten Absätzen, in der Richtung:

a) von rechts nach links werden bei der Multiplication die Ziffern des auf *C* in umgekehrter Ziffernaufeinanderfolge geschriebenen *n*-stelligen Multiplicators mit denen des auf *A* geschriebenen *m*-stelligen Multiplicanden symmetrisch der Reihe nach zu 1-, 2-, 3- . . . *n*- (in [m – n + 1] maliger Wiederholung), (n – 1-), (n – 2-) . . . 3-, 2-, 1-paarigen Gruppen zusammengestellt, woraus sich durch Multiplication der Factorenpaare in den gruppenweis zusammengehörigen Colonnen und durch Addition der so entstandenen Producte jeder Gruppe alle auf *B* niederzuschreibenden Werthziffern des Gesammtproductes ohne schriftliche Hülfsrechnung ergeben;
b) von links nach rechts wird bei der Division die erste Ziffer des auf *C* in umgekehrter Ziffernaufeinanderfolge geschriebenen *n*-stelligen Divisors als alleinig ausführender Divisor der Reihe nach unter jede Stelle des auf *A* geschriebenen Dividenden gerückt, und die jener ersten nachfolgenden Ziffern werden mit den nach jeder Einzeldivision vorhandenen gesammten Anzahl von Ziffern des Quotienten zu 1-, 2-, 3- . . . *n*-paarigen Gruppen zusammengestellt, deren Productensumme zur Herstellung des neuen Dividenden und einer neuen Stelle im Quotienten vom Rest der vorhergegangenen Division, nachdem dieser in Einheiten der nächst niederen Ordnung aufgelöst und mit der folgenden Stelle des Dividenden vereinigt worden ist, abzuziehen sind;
c) von links nach rechts wird beim Quadratwurzelausziehen nach Auffindung der ersten Stelle der Wurzel nach dem gebräuchlichen Verfahren das Zweifache derselben als Divisor der Reihe nach unter die übrigen Ziffern der Quadratzahl gerückt, wobei nach der Divisionsmethode unter b) zu verfahren ist, indem jede neue durch Division gefundene Stelle der Wurzel *B* zugleich an den Divisor *C* links angesetzt wird.

## Anhang 5: A Method of Multiplication which may be practised Mentally

Quelle: Oakes [30],

***A Method of Multiplication which may be practised Mentally.***
***By* LIEUT.-COL. WM. HENRY OAKES, *Bengal Presidency.***

1. WRITE down the multiplicand in the usual manner.

2. Write on a separate slip the multiplier with its figures reversed (as in contracted multiplication), being careful to space the figures so that they can be exactly placed over those of the multiplicand.

3. Thus arranged, place the multiplier so that the figure in the true unit's place may fall over the unit's place of the multiplicand; then multiply each figure of the multiplicand by that immediately over it, sum the products and write down the last figure of the sum, reserving the rest as a carriage.

4. Shift the multiplier one place to the left, multiply each figure as before and sum the products, adding thereto the carriage from the preceding operation; write down the last figure of this new sum, and reserve the rest as a carriage.

5. Proceed in this manner until the multiplier is exhausted; the sum last obtained must be written in full, and the work will then be complete.

*Example.*—$\overset{a\,b\,c\,d}{9763} \times \overset{l\,m\,n\,r}{8452}$.

***Process in detail, showing the several positions of the multiplier.***

2548 Multiplier reversed.
9763 Multiplicand.

6

```
    2548
    9763
   -----
      15
      12
     --
      27

    2548
    9763
   -----
      12
      30
      14
Carriage . . .  2
     --
      58

    2548
    9763
   -----
      24
      24
      35
      18
Carriage . . .  5
     --
     106

    2548
    9763
   -----
      48
      28
      45
Carriage . . . 10
     --
     131

    2548
    9763
   -----
      56
      36
Carriage . . . 13
     --
     105

    2548
    9763
   -----
      72
Carriage . .  10
     --
      82
```

*Mental process.*

```
                6 = rd.
              -----
            1 5 : = nd.
            1 2 : = rc.
            -----
            2 7 : sum.
          1 2 : : = md.
          3 0 : : = nc.
          1 4 : : = rb.
          -----
          5 8 : : sum.
        2 4 : : : = ld.
        2 4 : : : = mc.
        3 5 : : : = nb.
        1 8 : : : = ra.
        -------
      1 0 6 : : : sum.
      4 8 : : : : = lc.
      2 8 : : : : = mb.
      4 5 : : : : = na.
      -------
    1 3 1 : : : : sum.
    5 6 : : : : : = lb.
    3 6 : : : : : = ma.
    -------
  1 0 5 : : : : : sum.
  7 2 : : : : : : = la.
  -------
  8 2 5 1 6 8 7 6
```

The figures of the *result only* are to be recorded, as shown by the dotted lines.

## Bildnachweis

1 Apian [2], Abschn. *Multiplicatio*
2 vom Verfasser erstellt
3 Seidel [20]
4 Seidel [20], vom Verfasser abgeändert
5 Colson [7], S. 166
6.1 Graf [31], Text und Tafel IV
6.2 Bridge [32]
6.3 Pat. DE26107
7, 8, 9 vom Verfasser erstellt
10 Pacioli [17], fol. 27v, vom Verfasser ergänzt
11 Pacioli [17], fol. 28v
12 Regius [18] 1536, fol. LVI v, vom Verfasser ergänzt
13 John Napier (Neper), *Rabdologia*, 1617, S. 94f

## Literatur

[1] — Über Neuerungen an Rechenapparaten. In: Dinglers Polytechnisches Journal, 260. Bd. (1886), S. 167–172
[2] Apianus, Petrus (Apian, Peter): Ein newe und wolgegründete underweisung aller Kauffmanns Rechnung in dreyen Büchern, Ingolstadt 1527
[3] Bischoff, Johann Paul: Versuch einer Geschichte der Rechenmaschine. Ansbach 1804, Hrsg. Stephan Weiss München 1990
[4] Boyer, Jacques: La "Multi", nouvelle machine à multiplier. In: La Nature, 1920 II, S. 30-33
URL http://cnum.cnam.fr/CGI/redir.cgi?4KY28.99
[5] Cantor, Georg: Rezension von Blater, Erleichterungstafel. In: Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, XXXVI. Jg. 1891, Abschn. Recensionen, S. 154ff
[6] Cauchy, Augustin: Oeuvres complètes, Ser. 1, Bd. V, Paris 1885
[7] Colson, John: A short Account of Negativo-affirmative Arithmetick. In: Philosophical Transactions, Vol, XXXIV (1726), S. 161-174
[8] Deutsches Reichs-Patent (DRP) 26107 (jetzt DE26107): C. Julius Giesing in Döbeln. Rechenapparat. 31. Juli 1883
[9] Fourier, Jean Baptiste: Analyse des équations déterminées, Paris 1831. Dt. Die Auflösung der bestimmten Gleichungen, übers. und hrsg. von Alfred Loewy, Leipzig 1902 (Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften Nr. 127)
[10] Gallati, E.: Neue Methode der symmetrischen Multiplikation, 1878.
[11] Giesing, Carl Julius: Neuer Unterricht in der Schnellrechen-Kunst. 1. Tl.: Methode der symmetrischen Multiplication, Division und Wurzelausziehung. 2. Tl.: Anweisung zum Gebrauch eines auf diese Methode gegründeten Rechenapparates, Döbeln 1884
— Rezension durch Georg Cantor in: Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, XXX. Jg. 1885, Abschn. Historisch-Literarische Abt., S. 113f
[12] Hausbäck, Michael: Eine neue Art mit Zahlen zu multipliziren nebst einigen Rechnungsvortheilen bey der Multiplikation, Passau 1833
URL http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs2/object/display/bsb10081938_00004.html
[13] Hawkins, W. F.: The first calculating machine (John Napier, 1617).
In: IEEE Annals of the History of Computing, Vol. 10, Issue 1 (January 1988)

[14] Kössler, Franz: Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts, Bd. Gabel-Guzy. Universitätsbibl. Giessen, Giessener Elektronische Bibliothek, 2008
[15] Lüroth, Jakob: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900
[16] Oughtred, William: Clavis Mathematicae, 1631
[17] Pacioli, Luca: Summa di aritmetica, geometria, proportioni e proportionalita. Venedig 1494
URL http://contentdm.ub.uni-koeln.de/cdm4/item_viewer.php?CISOROOT=/schmalbach&CISOPTR=102662&CISOBOX=1&REC=2
[18] Regius, Ulricus: Utriusque Arithmetices Epitome. 1536, 1550
URL http://www.mdz-nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:bvb:12-bsb10186797-
[19] Rogg, Ignaz: Handbuch der mathematischen Literatur vom Anfange der Buchdruckerkunst bis zum Schlusse des Jahres 1830 (Bibliotheca mathematica...), 1830
[20] (Seidel, Johann Georg Gottfried): Die Multiplikazion in ihrer vollkommensten Gestalt... Dresden 1823
URL http://opacplus.bsb-muenchen.de/search?oclcno=260193568
[21] Smith, David Eugene: History of Mathematics, Vol. 2, 1958
[22] Tantner, Anton: Adressbüros in Wien, 1760-1850 oder: Das Comptoir des Barometermachers (Jan. 2013)
URL http://www.univie.ac.at/voeb/blog/?p=25502
[23] Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. 1902/1903 u. ö., neu ab 1980
[24] Unger, Friedrich: Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung. Leipzig 1888
[25] Weiss, Stephan: Die Multipiziermaschinen von Eduard Selling, Tl. 1 u. 2 (Feb. u. Jun. 2004)
URL http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen
[26] Weiss, Stephan: Die Multiplizierstäbe von Genaille und Lucas (Okt. 2004)
URL http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen
[27] Weiss, Stephan: Die Rechenstäbe von Neper, ihre Varianten und Nachfolger (April 2007)
URL http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen
[28] Weiss, Stephan: Rechengeräte im Angebot bei Johann Conrad Gütle 1792 (März 2012)
URL http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen
[29] Weiss, Stephan: Was ist eine Rechenmaschine? Die Bedeutung des Begriffs im Wandel (Juli 2008)
URL http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen
[30] Oakes, Wm. Henry: A Method of Multiplication which may be practised Mentally. In: The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries, Vol. X, London Jan. 1863, S. 326-327
[31] Graf, F.: Poppes Arithmograph. In: Dinglers Polytechnisches Journal. Jg. 1877, 223. Bd., S. 152-159
URL http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj223/ar223044
[32] Bridge, John: On a Calculating Apparatus based on Napier's Rods. In: Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. IX-fifth ser., Jan.-June 1880, S. 191-197
URL http://archive.org/details/londonedinburgh591880lond