Umwege suche ich nicht, zu den Logarithmen führe ich dich, mögen jene auch sehr getrennt von unserem Ziel gesehen wer den, deshalb zeige ich kurz jene Unterweisung, die Logarith men betreffend.
Alphonse Antonio de Sarasa, 1649

Die Berechnung der hyperbolischen Logarithmen im 17. Jahrhundert

Stephan Weiss

Summary

Hyperbolic logarithms were found in the 17th century while trying to determine the area between a hyperbola and an axis. This article follows that path and shows the methods of their calculation. The reasons for the lack of complete and useful hyperbolic tables until the middle of the 18th century are explained.

Logarithmen sind eine der grossen und weitreichenden Ausarbeitungen in der angewandten Mathematik. Auf der Grundlage erster Entwürfe im 16. Jahrhundert wurde diese Idee zu Beginn des 17. Jahrhunderts von John Napier 1614 und Henry Briggs 1618−1633 in Tafeln realisiert. Zahlreiche Varianten von Logarithmentafeln folgten. Man nannte sie zunächst Briggs'sche, später dekadische Logarithmen, weil ihnen die Basiszahl 10 zugrunde liegt.

Einige Jahrzehnte später entstand aus Untersuchungen zur Geometrie der Hyperbel das System der hyperbolischen Logarithmen, daher auch ihr erster Name. Es folgten Versuche, die Zahlenwerte dieser Logarithmen zu berechnen. Als Logarithmen Jahrzehnte später über die Basiszahl definiert wurden stellte sich heraus, dass sie mit den natürlichen Logarithmen zur Basis $e = 2,718\,281\,828\ldots$ identisch sind. Da man diesen Zusammenhang anfangs nicht erkennen konnte wird auch hier im historischen Zusammenhang dem Gebrauch folgend weiterhin die Bezeichnung hyperbolisch verwendet.

Die historische Definition des Logarithmus basiert auf einer Definition mit Hilfe von Proportionalitäten. Davon ausgehend wurden die dekadischen Logarithmen berechnet und mit ihr wurde der hyperbolische Logarithmus gefunden. Diese Definition unterscheidet sich wesentlich von der modernen sogenannten funktionalen Definition. Zum besseren Verständnis der historischen Argumente und Ergebnisse in den Arbeiten zeitgenössischer Mathematiker soll nachfolgend das Wesentliche der historischen Definition in Kurzfassung erläutert werden.

Logarithmen bilden eine arithmetische Folge von Zahlen, die ihren Numeri in einer geometrischen Folge zugeordnet sind.

Geom. Folge (Num)	z	$z \cdot q$	$z \cdot q^2$	$z \cdot q^3$	…
Arith. Folge (Log)	s	$s+d$	$s+2d$	$s+3d$	…

In einer geometrischen Folge wird jede nächste Zahl durch Multiplikation der vorhergehenden mit dem gleichen konstanten Faktor q gebildet.
In einer arithmetischen Folge wird jede nächste Zahl durch Addition oder Subtraktion einer Konstanten d zu der vorhergehenden gebildet.

Die Zuordnung von Logarithmus zu Numerus kann in weiten Grenzen gesetzt werden, der Sonderfall log(1) = 0 ist nur eine Möglichkeit. Es stellte sich bald heraus, dass diese Zuordnung die Anwendung von Logarithmen vereinfacht und zu der uns heute geläufigen Beziehung
log (a*b) = log a + log b
führt.

Henry Briggs hat neben der Stufung der Numeri in Potenzen von 10 auf diese Vereinfachung log(1) = 0 zurückgegriffen.
Ergänzt werden muss, dass der historischen Definition des Logarithmus keine Basiszahl zu Grunde liegt.[1]

Der hyperbolische Logarithmus hat seine Wurzeln in den Untersuchungen zur Quadratur der Hyperbel. Darunter verstand man die Bestimmung des Flächeninhaltes von Segmenten zwischen der Hyperbel und ihrer Abszisse oder Ordinate.

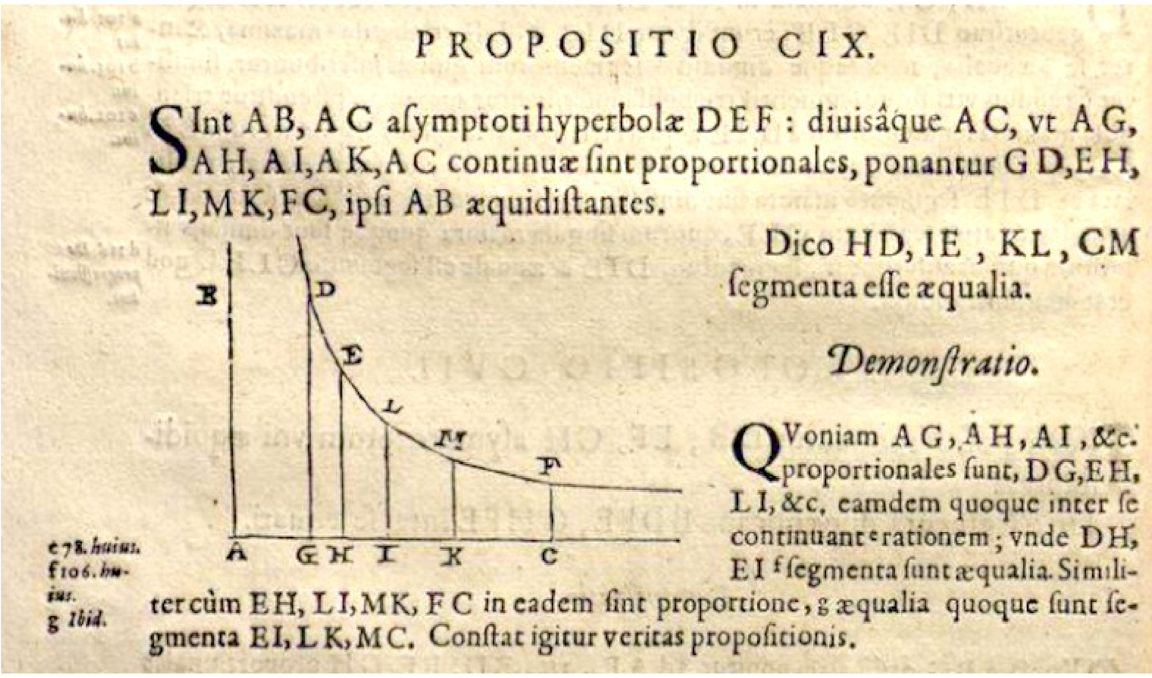
Bei der Suche nach diesen Wurzeln findet man eine Abfolge von Beiträgen, die zuweilen aufeinander Bezug nehmen, ablehnend, zustimmend oder ergänzend. Die Darstellungen der Autoren stützen sich auf Beweisführungen und Ableitungen aus der Geometrie sowie auf Betrachtungen zu Proportionalitäten.
Zugleich waren die Untersuchungen an der Hyperbel ein Ausgangspunkt für die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Dieser Zweig muss hier unberücksichtigt bleiben. Für die folgenden Erläuterungen wurden deshalb nur thematisch

1 Ausführlich s. hierzu Weiss 2013 und 2021.

relevante Abschnitte aus den originalen Werken verwendet, wo notwendig verkürzt und in moderne verständliche Fassungen und Formeln umgesetzt.

Der Schwerpunkt dieser Ausarbeitung beschränkt sich auf die Frage, mit welchen Methoden und in welchem Umfang hyperbolische Logarithmen tatsächlich berechnet und nicht nur aus theoretischer Sicht behandelt wurden.

In der zeitlichen Reihenfolge der Beiträge zum Thema ist zunächst der flämische Mathematiker und Jesuit **Grégoire de Saint-Vincent** (1584−1667) zu nennen. Er zeigt in seinem Werk *Opus Geometricum* 1647 u.a. eine der besonderen Eigenschaften der Hyperbel mit der Ordinate AB und der Abszisse AC (Bild 1)[2]



PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF : diuiſâque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.

Demonſtratio.

Qvoniam AG, AH, AI, &c. proportionales ſunt, DG, EH, LI, &c. eamdem quoque inter ſe continuant e rationem; vnde DH, EI f ſegmenta ſunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem ſint proportione, g æqualia quoque ſunt ſegmenta EI, LK, MC. Conſtat igitur veritas propoſitionis.

e 78. huius. f 106. huius. g Ibid.

Bild 1: aus Saint-Vincent 1647, S. 586, Propos. 109

Er zeichnet von den Punkten G, H, I, K, C auf der Abszisse aus eine Linie parallel zur Ordinate AB nach oben bis zur Hyperbel und stellt fest, wenn die Strecken AG, AH, AI, AK, AC auf der Abszisse eine geometrische Folge bilden, d.h. wenn für sie gilt

$$\frac{AH}{AG} = \frac{AI}{AH} = \frac{AK}{AI} = \frac{AC}{AK} = \cdots$$

dann sind die Flächen *DGHE, EHIL, LIKM, MKCF*... unter der Hyperbel gleich gross. Anders ausgedrückt, setzt man das Verhältnis $AH/AG = r$ dann bilden die Strecken

2 St.Vincent 1647, S. 597, Propositio (Aussage) 109. S. a. Volkert 1996.

$AG,\ AH = AGr,\ AI = AHr = AGr^2,\ AK = AIr = AGr^3,\ AC = AKr = AGr^4$ usw.

eine geometrische Folge und die Flächen

DGHE, DGIL, DGKM, DGCF usw. eine arithmetische Folge.

Hier tritt die Zuordnung zwischen den Elementen einer geometrischen und einer arithmetischen Folge zutage, die der historischen Definition der Logarithmen entspricht. Bei St.Vincent ist von einem Logarithmus noch nicht die Rede, erst sein Nachfolger geht darauf ein.

St.Vincents Schüler und späterer Kollege **Alphonse Antonio de Sarasa** (1618–1667) greift in seinen Arbeiten die Zusammenhänge zwischen Abschnitten auf der Abszisse und den zugehörigen Hyperbelsegmenten wieder auf (Bild 2)[3]

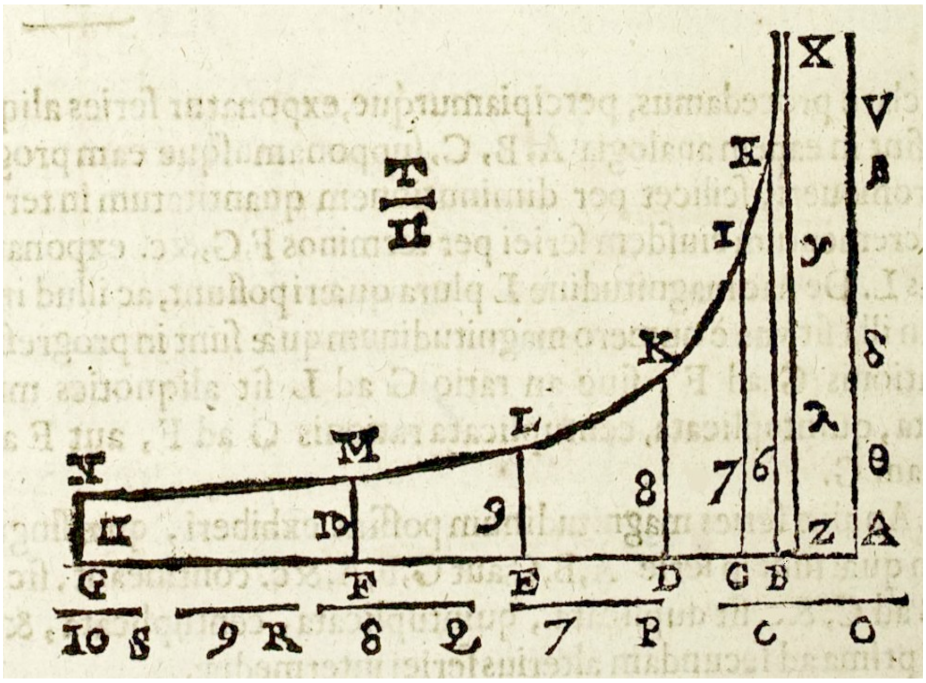


Bild 2: aus Sarasa 1649, Propos. 3

Nach einer langen Ableitung zeigt er, vereinfacht dargestellt, wenn die Flächen unter der Hyperbel innerhalb der Senkrechten *HB, IC, KD, LE, MF* usw. gleich sind, d.h. sie ergeben aufsummiert eine arithmetische Folge, dann bilden die Strecken *AB, AC, AD, AE, AF* usw. eine geometrische Folge. Über diesen bereits bekannten Zusammenhang hinaus betrachtet Sarasa erstmals die Segmente

3 Sarasa 1649, S. 8, Propos. 3 und folgendes Scholion (Randbemerkung)
Die Buchstaben T und H in Bildmitte sind verrutscht und sollten links unten stehend die Folge verlängern.

unter der Hyperbel als Logarithmen. Zu dieser Interpretation führt er den Leser mit dem aufklärenden Satz

> *Aber wozu diese Unruhe? Umwege suche ich nicht, zu den Logarithmen führe ich dich, mögen jene auch sehr getrennt von unserem Ziel gesehen werden, deshalb zeige ich kurz jene Unterweisung, die Logarithmen betreffend*[4]

In Ergänzung erläutert Sarasa, dass sich aus diesen Ersetzungen mehr als nur eine Zuordnung zwischen geometrischer und arithmetischer Folge ableiten lässt, darunter auch, wie in Bild 2 eingetragen, die Folge der Zahlen 6 bis 11 an Stelle der Flächen. Er präzisiert

> *Deshalb können diese Flächen den Platz der gegebenen Logarithmen ersetzen...*[5]

Mit dieser Verallgemeinerung werden Zahlen und Segmente austauschbar. Weil Sarasa basierend auf der proportionalen Definition die Natur der Logarithmen meint und nicht ihre definierten Werte, wird daraus noch kein vollständiges logarithmisches System. Somit bleibt auch unbestimmt, ob und für welche Zahl der Logarithmus Null gelten soll.

Einen konkreten Schritt weiter in diese Richtung geht der schottische Mathematiker und Astronom **James Gregory** (1638–1675). Er greift erneut die Identität zwischen Fläche und Logarithmus auf.
In *Vera circuli et hyperbolae quadratura* 1667 berechnet er die Fläche eines Hyperbelsegments, indem der Abschnitt der Hyperbel durch zwei gleichmässig geteilte Polygonzüge ersetzt wird, die der Hyperbel eingeschrieben und umschrieben sind. Mit zunehmender Teilung und weiteren Zwischenrechnungen erhält er schliesslich, auf 17 Stellen genau

Hlog 10 = 23025850929940456240178700
(entsprechend ln 10 = 2,302585...)[6]

Im Vergleich des Ergebnisses mit dem Zahlenwert für log 10 = 1 (bzw. 100000...) bei Briggs handelt es sich um eine neue Art von Logarithmus, das fiel den Sachkundigen damals auch auf.

Gregory rechnet mit grossen Zahlen in der Teilung auf Abszisse und Ordinate weil er eine hohe Genauigkeit erreichen will und weil sich eine einheitliche Schreibweise des Dezimalbruchs noch nicht durchgesetzt hat. Die Nachrechnung

---

4 *Sed quorsum haec inquies? ambages non quaero, ad Logarithmos te duco licet valde disparata videantur haec a scopo nostro, breviter igitur eam doctrinam, Logarithmos comprehendere, sic ostendo.* Sarasa 1649, S. 8, Scholion, Übersetzung vom Verfasser.

5 *Unde hae superficies supplere possunt locum logarithmorum datorum...* Sarasa 1649, S. 16, Übersetzung vom Verfasser.

6 Gregory 1667, S. 48f. Wie bei González-Velasco 2011 wird hier Hlog als Kurzbezeichnung für den aus der Hyperbel abgeleiteten Logarithmus verwendet.

seiner Annahmen ergibt, dass er mit der Hyperbel y = 1/x arbeitet und Hlog 1 = 0 setzt.[7]

Zu seiner Methode der Berechnung führt Gregory aus, diese Vorgehensweise sei eine lange und beschwerliche Arbeit gewesen. Deshalb gibt er eine Anleitung, wie man weitere Logarithmen berechnen kann. Er schreibt von einer logarithmischen Tafel, fügt aber keine bei.[8]

Kurze Zeit später macht Gregory Bekanntschaft mit einer grundlegenden Arbeit über das Berechnen von Logarithmen, der *Logarithmotechnia* von 1668 des Mathematikers und Astronomen **Nicolaus Mercator** (1620?–1687).

Mercator – das ist die latinisierte Version seines Namens Nikolaus Kauffmann – geht darin zunächst auf das Berechnen von dekadischen Logarithmen ein. Im letzten Abschnitt zeigt er, dass sich die Flächen unter der Hyperbel als Logarithmen auffassen lassen und diese hyperbolischen Logarithmen mit einer unendliche Potenzreihe darstellbar sind.

In einer Ergänzung[9] aus dem gleichen Jahr gibt Mercator weitere Erläuterungen. Er verwendet darin erstmals den Begriff *logarithmus naturalis* und fügt eine Tafel natürlicher Logarithmen bei, die in Bild 3 dargestellt ist.

1	00000000000	02,30258509299
2	69314718052	04,60517018599
3	109861228860	06,90775527898
4	138629436104	09,21034037198
5	160943791232	11,51292546497
6	179175946912	13,81551055796
7	194591014904	16,11809565096
8	207944154156	18,42068074395
9	219722457720	20,72326583695

Bild 3: aus Mercator 1668b, S. 762

Tabelliert sind die Zahlenwerte ln(a), in der linken Spalte für a = 1, (1), 9, in der rechten Spalte für $a = 10^n$ mit n = 1, (1), 9.

Grundlage für Mercators Berechnungen sind Potenzreihen, deren Ableitung und Aufbau er verbal und nicht sehr übersichtlich darstellt. Ausgangspunkt ist die Hyperbel $y = \frac{1}{1+x}$, entstanden aus der Verschiebung des Koordinatensys-

7 Heinrich 1901, S. 79; González-Velasco 2011, S. 121.

8 Gregory 1667, S. 53-55.

9 Mercator 1668b.

tems der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ um eine Einheit nach rechts. Daraus leitet er ab, in moderner Fassung geschrieben,

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1 \tag{1a}$$

bzw.

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{1b}$$

Mit x = 1/m ergibt sich

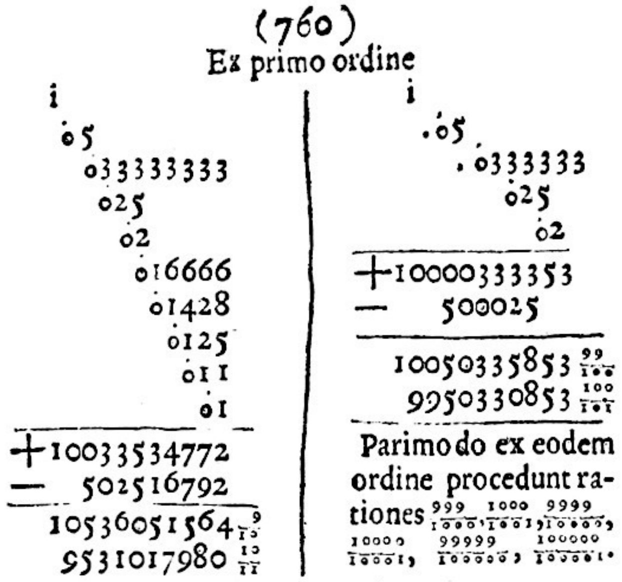
$$\ln(1 + \frac{1}{m}) = \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} - \frac{1}{4m^4} + \frac{1}{5m^5} - \cdots \tag{2a}$$

oder, mit 1/m negativ,

$$\ln(1 - \frac{1}{m}) = -\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} - \frac{1}{4m^4} - \frac{1}{5m^5} - \cdots \tag{2b}$$

Die Darstellung als Potenzreihe gibt eine neuartige Möglichkeit der Bearbeitung und Berechnung von hyperbolischen Logarithmen, nicht mehr nur über Proportionen. Dieses neue Verfahren nehmen bald andere Mathematiker auf und erarbeiten Varianten.

Die Berechnung von ln(11/10) und ln(10/9) bei Mercator ist in Bild 4 dargestellt.


(760)
Ex primo ordine

1	1
05	05
0333333333	0333333
025	025
02	02
016666	+10000333353
01428	— 500025
0125	10050335853 $\frac{99}{100}$
011	9950330853 $\frac{100}{101}$
01	Parimodo ex eodem ordine procedunt rationes $\frac{999}{1000}$, $\frac{1000}{1001}$, $\frac{9999}{10000}$, $\frac{10000}{10001}$, $\frac{99999}{100000}$, $\frac{100000}{100001}$.
+10033534772	
— 502516792	
10536051564 $\frac{9}{11}$	
9531017980 $\frac{10}{11}$	

Bild 4: aus Mercator 1668b, S. 760

Auf der linken Seite im Bild stehen untereinander die Werte von 1/n für n = 1 bis 10, jeweils um eine Stelle nach rechts versetzt. Unter dem ersten Querstrich findet man die erste Zwischensumme 10033534772 aller Werte für n ungerade (1, 3, 5, 7, 9) sowie die zweite Zwischensumme 502516792 aller Werte für n gerade (2, 4, 6, 8, 10). Darunter folgt ein weiterer Querstrich.

Für die Berechnung von ln(11/10) = ln(1 + 1/10) ist m = 10. Eingesetzt in die Potenzreihe (2a) von oben ergibt sich, dass alle Elemente mit ungeradem n im Nenner positiv, mit geradem n im Nenner negativ werden. Die Potenzen von m = 10 im Nenner sind bereits bei der Einrückung der Zahlenwerte von 1/m untereinander berücksichtigt. Mercator zieht die zweite Zwischensumme von der ersten ab und erhält das Ergebnis

ln(11/10) = 9531017980 (entsprechend 0,09531…).

In der Berechnung von ln(10/9) = ln(1 + 1/9) mit m = 9 müsste Mercator die Potenzen von 9 bestimmen. Er rechnet daher sehr geschickt mit dem Kehrwert des Arguments, nämlich 9/10 = 1 – 1/10 mit m = –10. Damit werden alle Elemente der Potenzreihe negativ (Gl. 2b). Da jedoch der Logarithmus des Kehrwertes eines Arguments negativ ist erhält man durchgehend positive Elemente in der Potenzreihe. Mercator addiert daher die ersten und zweiten Zwischenergebnisse und erhält

ln(10/9) = 10536051564 (entspechend 0,10536…).

An dieser Stelle ist der Hinweis auf den Beitrag eines späteren Autors zum gleichen Thema angebracht.

Francis Maseres (1731-1824), Richter, Generalstaatsanwalt, Historiker und Mathematiker, veröffentlicht zwischen 1791 und 1807 sein mehrbändiges Werk *Scriptores Logarithmici*, (dt. Autoren zu Logarithmen), *or a collection of several curious tracts on the nature and construction of logarithms.* Es enthält sowohl die Wiedergabe originaler Texte anderer Autoren als auch eigene Ergänzungen und Kommentare.

Maseres geht in einem Abschnitt ausführlich und auch mit Bezug auf Mercator auf das Berechnen von Logarithmen ein.[10]
In ersten Beispiel wird ln(10/9) mit Hilfe von Gl. (2a) berechnet.
Da 10/9 = 1 + 1/9 gilt hier m = 9. Die Elemente $1/m^n$ werden durch fortgesetztes Dividieren des Vorhergenden durch 9 ermittelt.

Maseres bezieht sich auf Mercator, allerdings wendet er nicht dessen Umformung über den Kehrwert an sondern er dividiert in diesem Beispel wiederholt durch 9 und notiert die Zwischenergebnisse. In Bild 5 ist diese letzte Zusammenfassung dargestellt. Die Zwischenergebnisse werden dann durch 2, durch 3 usw. dividiert. Für eine grössere Genauigkeit rechnet Maseres bis zur 18. Potenz.

0;111,111,111,111,111,111, — 0;006,172,839,506,172,839,
+ ;...,457,247,370,827,617, — ;...,.38,103,947,568,968,
+ ;...,..3,387,017,561,686, — ;...,...,313,612,737,193,
+ ;...,...,.29,867,879,732, — ;...,...,..2,903,821,640,
+ ;...,...,...,286,797,199, — ;...,...,...,.28,679,719,
+ ;...,...,...,..2,896,941, — ;...,...,...,...,295,058,
+ ;...,...,...,...,.30,262, — ;...,...,...,...,..3,122,
+ ;...,...,...,...,...,323, — ;...,...,...,...,...,.33,
+ ;...,...,...,...,...,..3, — ;...,...,...,...,...,...,

= 0.111,571,775,657,104,874, — 0.006,211,259,999,278,572,
= 0.105,360,515,657,826,302. Therefore this number 0.105,360,515,657, 826,302 is the logarithm of the ratio of $1 + \frac{1}{9}$ to 1, or of 10 to 9.

Bild 5: aus Maseres Bd. 1, S. 253

Nach Aufsummieren der positiven und Subtrahieren der negativen Zwischenergebnisse erhält er das Ergebnis
ln(10/9) = 0,105360515657826302.

Mercator berechnet nach dem gleichen Verfahren wie oben gezeigt auch ln(10/8) und ln(12/10). Sodann ermittelt er aus den bekannten Zahlenwerten weitere Logarithmen mit Hilfe der Beziehungen

10 Maseres Bd. 1, ab S. 251. *Examples of the Computation of the Logarithms of the Ratios of Several Numbers.*

ln(3/2) = ln(10/8) + ln(12/10)

ln(4/3) = ln(12/10) + ln(10/9)

ln(2) = ln(3/2) + ln(4/3)

ln(8) = 3 * ln(2)

ln(10) = ln(10/8) + ln(8) = 2302585092(84

ln(11) = ln(10) + ln(11/10)

ln(3) = ln(3/2) + ln(2)

Auffallend ist hierbei die gezielte Verwendung von Brüchen bzw. Proportionen, um die Logarithmen ganzer Zahlen zu erlangen.

Hierzu ist anzumerken, dass er so nur rechnen kann, weil die verwendete Gleichung die Vereinfachung log 1 = 0 enthält.

Darüber hinaus kennt Mercator das Verhältnis der natürlichen Logarithmen zu den, wie er schreibt „tabulierten“, womit die bekannten dekadischen Logarithmen gemeint sind, weil er gegenüberstellt

$$\frac{\ln 10}{\log 10} = \frac{2302585}{10000000} = \frac{1}{4{,}3429448}$$

Nicht unerwähnt bleiben darf an dieser Stelle der Mathematiker, Physiker und Astronom **Isaac Newton** (1642-1727). Um 1665 / 1666 erarbeitet er aus Proportionen in der Hyperbel die Berechnung des natürlichen Logarithmus mit Hilfe von Potenzreihen, vergleichbar mit der Methode bei Mercator. Allerdings publiziert er seine Arbeiten nicht, sie werden erst zehn Jahre nach seinem Tod veröffentlicht.[11]

Zurück zu James Gregory. Wie bereits erwähnt lernt er Mercators Werk kennen und ist davon begeistert. Er hält es für besser als seine eigenen Beiträge zu diesem Thema in *Vera Circuli* und erweitert seine neue Arbeit *Exercitationes Geometricae* 1668 um einen weiteren Abschnitt hierzu. Darin erarbeitet er auf geometrischer Basis und mittels Subtraktion zweier Potenzreihen für den natürlichen Logarithmus eine neue Darstellung hierfür.[12]

Dieses Ergebnis erläutert er nochmals in einem Brief an den der Mathematik kundigen Michael Dary (??-1679), der in einer nicht näher bekannten höheren Stellung im Aufgabenbereich Mass und Gewicht tätig ist und Schriften mathematischen Inhalts publiziert.[13] Dary gibt diese Kenntnisse weiter an **Euclid Speidell**, dessen Werk über die Berechnung von hyperbolischen Logarithmen nun vorgestellt werden soll.

11 Newton 1736. S. a. Maseres Bd. 1, S. Cff.

12 Gregory 1668, S. 9-13, *N. Mercatoris. Quadratura Hyperboles Geometrice Demonstrata.* S. a. Maseres Bd. 1, S. XCVI u. Bd. 2 , S. 2-5.

Erwähnenswert ist, dass Euclid Speidell der Sohn des John Speidell, Professor für Mathematik, war. Sein Vater hatte Änderungen und Ergänzungen an John Napiers Logarithmen vorgenommen und 1619 unter dem Titel *New Logarithmes* veröffentlicht. Die Tafel enthält Zahlenwerte des natürlichen Logarithmus, der allein auf den Ansatz Napiers zurüchzuführen ist und keine eigenständige Erarbeitung darstellt.[14]

Das Interesse an Mathematik muss Euclid Speidell von seinem Vater übernommen haben, im Titel seines Werkes nennt er sich *PhiloMath,* Liebhaber der Mathematik. Im Jahr 1688 veröffentlicht er seine

> *Logarithmotechnia: The making of numbers called logarithms to twenty five places from a geometrical figure: with speed, ease, and certainty: the like not hitherto published.*

Der Titel gibt einige Informationen zum Inhalt. Er besagt, dass der Autor Logarithmen mit 25 Stellen berechnet, eine geometrische Figur diene als Grundlage, die angewandte Methode sei schnell, einfach und sicher und eine solche Aufstellung habe es bisher noch nicht gegeben. Die folgende Analyse seines Werkes wird diese Behauptungen prüfen.

Gleich das erste Kapitel ist überschrieben mit *Geometrical Logarithms.* Gemeint ist damit deren Ableitung aus der Geometrie der Hyperbel.
Über die Quelle seiner Methode schreibt Speidell, er habe sich um 1675/76 mit Michael Dairy, hier ist der Name etwas anders geschrieben, über hyperbolische Logarithmen unterhalten und ihn um eine Methode des Berechnens von Hlog 10 gebeten. Nach seiner Aussage soll sich Dary die meiste Zeit seines Lebens dem Studium der Mathematik gewidmet haben.

Einige Zeit später klärt ihn der Mathematiker John Collins darüber auf, dass diese Rechenmethode aus Gregorys *Exercitationes* stammt.[15] Speidell kauft sich das Buch und kommentiert in den ersten Kapiteln seines Werkes die geometrischen Ableitungen bei Gregory.

Daran anschliessend greift er auf die Rechenmethode zurück, die von Gregory stammt und auf die ihn Dary aufmerksam gemacht hat. In moderner Darstellung handelt es sich um die Potenzreihe

---

13 Hofmann 1939, S. 40. Dary publizierte
Gauging Epitomised, by Michael Dary, 1669.
*Dary's Miscellanies: being, for the most part, a brief collection of mathematical theorems, from divers authors,... ,*1669.
Interest Epitomized, both compound and simple. 1677.

14 Henderson 1926, S. 175, Ziff. 203,0. Weiss 2013, S. 15.

15 Speidell 1688, S. 3.

$$\frac{Hlog\,z}{2} = \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots \qquad (3)$$ [16]

Die Berechnung von Hlog 2 führt Speidell auf den Seiten 34 und 35 ausführlich vor (s. Bild 6). Für z = 2 beginnt er mit

$\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{3}$ = 33333333… mit ausreichender Stellenzahl (Zeile I links)

Für die Berechnung der folgenden Potenzen in der Reihe dividiert er von oben nach unten jede vorhergehende Zahl durch 9, denn es gilt

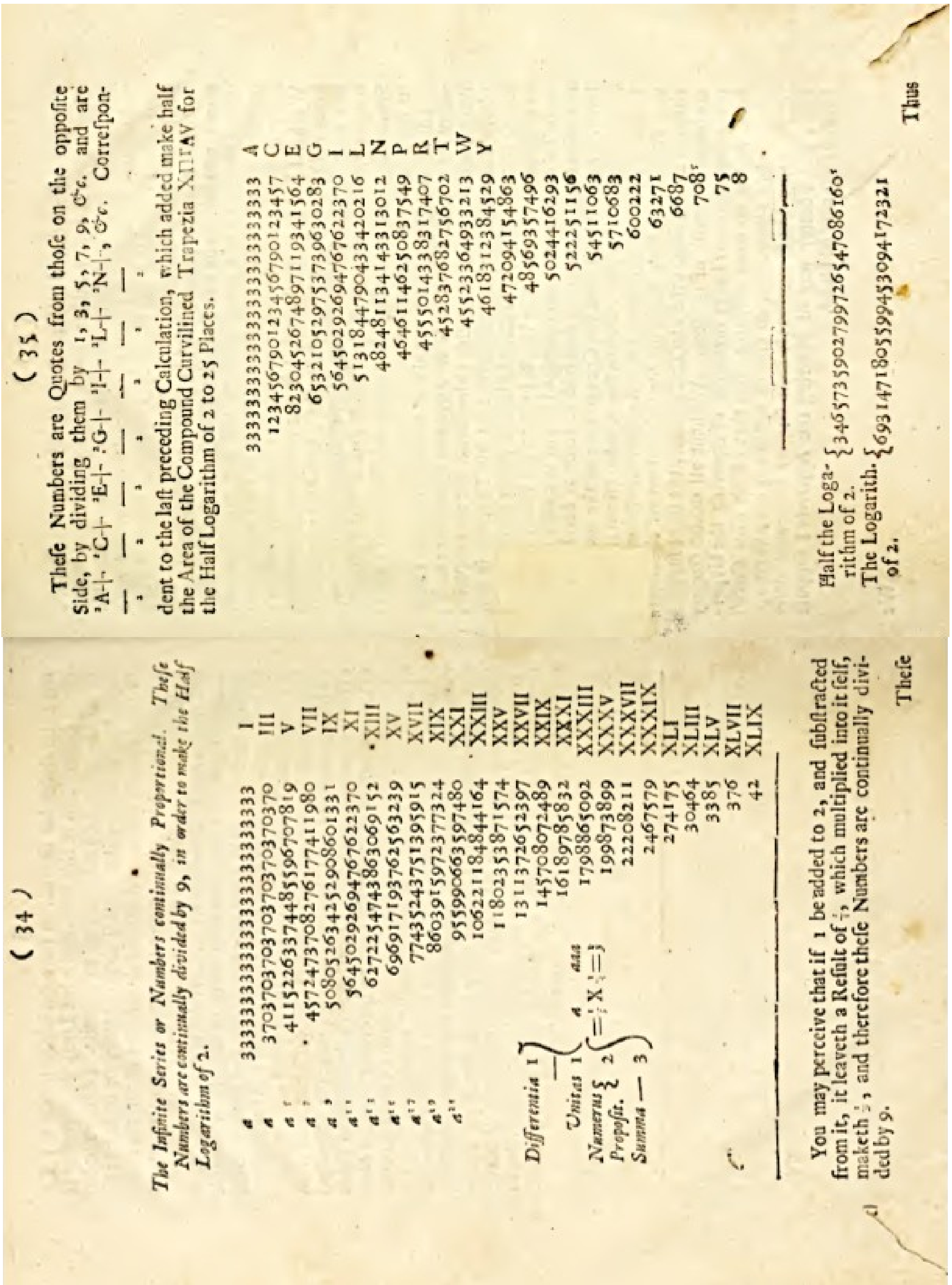
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ und hier $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{9}$.

In der linken Spalte auf S. 34 stehen untereinander die Zahlen
33333333... / 9 = 37037037...
37037037... / 9 = 41152263…
41152263… / 9 = 45724736...

Die Zeilen mit ihren Zahlen sind mit den römischen Zahlen I, III, V, VII, IX usw. der Potenzen des Klammerausdrucks markiert.

16 Gleichung (3) ergibt sich aus (1a) minus (1b) $\equiv$ $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots\right)$

mit $x = \frac{z-1}{z+1}$.



(34)

The Infinite Series or Numbers continually Proportional. These Numbers are continually divided by 9, in order to make the Half Logarithm of 2.

a	3333333333333333333333333	I
a	370370370370370370370370	III
a	41152263374485596707819	V
a	4572473708276177411980	VII
a	508052634252908601331	IX
a	56450292694767622370	XI
a	6272254743863069152	XIII
a	696917193762563239	XV
a	77435243751395915	XVII
a	8603915972377324	XIX
a	955990663597480	XXI
	106221184844164	XXIII
	11802353871574	XXV
	1311372652397	XXVII
	145708072489	XXIX
	16189785832	XXXI
	1798865092	XXXIII
	199873899	XXXV
	22208211	XXXVII
	2467579	XXXIX
	274175	XLI
	30464	XLIII
	3385	XLV
	376	XLVII
	42	XLIX

Differentia 1 — *Unitas* 1, *Numerus Proposit.* 2, *Summa* — 3 $\quad \frac{a}{} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{aaa}{}\frac{1}{9}$

You may perceive that if 1 be added to 2, and substracted from it, it leaveth a Result of $\frac{1}{3}$, which multiplied into it self, maketh $\frac{1}{9}$, and therefore these Numbers are continually divided by 9.

These

(35)

These Numbers are Quotes from those on the opposite Side, by dividing them by 1, 3, 5, 7, 9, &c. and are $\frac{1}{2}$A+ $\frac{1}{2}$C+ $\frac{1}{2}$E+ $\frac{1}{2}$G+ $\frac{1}{2}$I+ $\frac{1}{2}$L+ $\frac{1}{2}$N+, &c. Correspondent to the last preceding Calculation, which added make half the Area of the Compound Curvilined Trapezia XΠΓAV for the Half Logarithm of 2 to 25 Places.

3333333333333333333333333	A
123456790123456790123457	C
8230452674897119341564	E
653210529753739630283	G
56450292694767622370	I
5131844790433420216	L
482481134143313012	N
46461146250837549	P
4555014338317407	R
452837682756702	T
45523364933213	W
4618312384529	Y
472094154863	
48569357496	
5024416293	
522251156	
54511063	
5710683	
600222	
63271	
6687	
708	
75	
8	

Half the Logarithm of 2. {3465735902799726547086160

The Logarith. of 2. {6931471805599453094172321

Thus

Bild 6: Berechnung von Hlog 2 bei Speidell 1688, S. 34f

Anschliessend dividiert er von oben nach unten jede dieser Zahlen in der linken Spalte durch 3, 5, 7 usw. und notiert die Ergebnisse daneben in der Spalte rechts auf S. 35 in gleicher Höhe:

33333333... / 1 = 33333333...
37037037... / 3 = 12345679...
41152263... / 5 = 82304526...

Die Summe dieser Zahlen in der rechten Spalte entspricht (Hlog 2) / 2 und ergibt, mit 2 multipliziert, das gesuchte Ergebnis
Hlog 2 = 6931471805599453094172321 (25-stellig, entsprechend 0,6931471...)

Speidell merkt an, dass er an dieser Rechnung etwa zwei Stunden gearbeitet hat und dass sie weitaus leichter vonstattengeht als Gregorys erste Methode. Des Weiteren zeigt er auf, dass man mit einigen bereits bekannten Logarithmen andere auf einem einfachen Weg bestimmen kann. So lassen sich Vielfache einer Zahl durch Multiplizieren ihres Logarithmus bestimmen oder andere Zahlen, als Produkte dargestellt, durch Addieren ihrer Logarithmen. Als Beispiele hierfür nennt er

Hlog 4 = 2 * Hlog 2;
Hlog 5 = Hlog 4 + Hlog (1 + 1/4);
Hlog 10 = Hlog 2 + Hlog 5;

Um wie gezeigt weitere Logarithmen zu ermitteln berechnet Speidell
Hlog (1 + 1/4) auf die gleiche Weise wie zuvor Hlog 2.
Mit z = 1 + 1/4 ergibt sich

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{9} = 11111111\ldots \text{ und } \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

Die Rechnung beginnt mit der Zahl 11111111..., die wie alle nachfolgenden Zahlen durch 81 dividiert wird.
Das vorläufige Ergebnis seiner Arbeiten ist eine kurze Tabelle hyperbolischer Logarithmen mit 25 Stellen (Bild 7).[17]

Logarithm	of	2.	6931471805599453094172321
Logarithm	of	8.	20794415416798359282516963
Logarithm	of	1 $\frac{1}{4}$.	2231435513142097557662951
Logarithm	of	10.	23025850929940456840179914
Logarithm	of	5.	16094379124341003746007593

Bild 7: Hyperbolische Logarithmen bei Speidell 1688

Mit weiteren Berechnungen, die ähnlich ablaufen wie oben gezeigt, erhält er die hyperbolischen Logarithmen der ganzen Zahlen von 2 bis 10.

17 Speidell 1688, S. 38.

Die rechentechnische Brücke zu den dekadischen Logarithmen von Briggs schlägt Speidell über die historische proportionale Definition der Logarithmen. Er argumentiert, es gelte

$$\frac{Hlog\,10}{Hlog\,2} = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

Daraus errechnet er über eine langwierige Division
log 2 = 301029995663981190

Speidell beendet sein Werk mit der Anmerkung, er wollte keine Logarithmentafel beifügen sondern nur zeigen, wie man diese berechnen und veröffentlichte prüfen könne.
Auch will er nach seinem Bekunden keine Beispiele für den Gebrauch der Logarithmen geben. Hierzu verweist er auf die Autoren der vorhandenen Tafeln. Er vergisst auch nicht seinen Vater zu erwähnen, der andere Logarithmen veröffentlichte, sich dann aber für die von Briggs entschied und Anleitungen zu deren Verwendung gab.

Die Aussagen Speidells im Titel seines Werkes sind alle richtig, eine Aufstellung dieser Art hat es bisher nicht gegeben, sofern man von jener bei Mercator mit geringerer Stellenzahl absieht, und sie stand auch in den nächsten achtzig Jahren nicht zur Verfügung.

Vollständige Tafeln hyperbolischer Logarithmen erscheinen erst ab 1769/70 als Teil einer umfangreicheren Tafelsammlung. Die ersten[18] sind enthalten bei

Toaldo,	1769. *Tavole Trigonometriche...,*
Gardiner,	1770. *Tables de Logarithmes,*
Lambert,	1770. *Zusätze zu den Logarith. und Trigonom. Tabellen,*
Schulze,	1778. *Sammlung Logarithmischer, Trigonometrischer… Tafeln.*
Vega,	1794. *Thesaurus Logarithmorum Completus.*

Manche Tafeln bringen zusätzliche Angaben über die Berechnung der hyperbolischen Logarithmen, so bei Lambert 1770.
Bei Vega 1794 sind auf S. 641 ebenfalls Formeln für die Berechnung der Logarithmen aufgeführt. Letztere werden hier bereits, eine seltene Ausnahme, *logarithmi naturales* genannt. Ohne auf diese Methoden der Berechnung näher einzugehen kann man sie beschreiben als mit denen des 17. Jahrhunderts identisch oder aus ihnen abgeleitet.

Die vorgestellten Autoren des 17. Jahrhunderts von James Gregory bis Euclid Speidell erläutern das Berechnen von hyperbolischen Logarithmen anhand einiger Zahlenwerte, sie geben jedoch keine vollständige brauchbare Tafel. Auffallend ist die lange Pause von achtzig Jahren von Speidell bis zum Erscheinen voll-

18 Zum Umfang der Tafeln s. Henderson 1922, S. 84 und S. 177ff.

ständiger Tafeln mit hyperbolischen Logarithmen. Hierfür gibt es meines Erachtens mehrere Gründe.

Für das Abkürzen umfangreicher Berechnungen standen bereits die Tafeln mit dekadischen Logarithmen von Briggs und den späteren Bearbeitern zur Verfügung. Sie haben zudem den Vorteil, in den Potenzen von 10 ganzzahlig gestuft zu sein, was das Arbeiten mit Kennziffer und Mantisse ermöglicht.[19] Des Weiteren befand sich im 17. Jahrhundert die Differential- und Integralrechnung erst im Aufbau. Lambert drückt diese Zusammenhänge im Vorwort zu seinen Tafeln hyperbolischer Logarithmen von 1770 klar aus:

> *§ 57. Jedoch um nunmehr zur Sache zu kommen, so kehre ich wieder zu der Anmerkung zurücke, daß seit dem Integralcalcul die Logarithmen sich auf eine viel allgemeinere Art nothwendig gemacht haben, als Nepper es sich zu seiner Zeit vorstellen könnte. Das Integrale*
>
> $$\int \frac{dx}{x}$$
>
> *und unzählige andere, die davon abhängen, kömmt bey dem Integriren sehr häufig vor, und ohne Logarithmen würden eine Menge nützlicher und wichtiger Aufgaben so viel als noch ganz unaufgelößt seyn. Nun fordert zwar der Integralcalcul eigentlich die hyperbolische oder eigentlich natürliche Logarithmen nur zur Abkürzung der Rechnungen gebrauchte, so ließ man die hyperbolischen fahren, und berechnete andere, die der decimalen Einrichtung des Zahlengebäudes angemessener waren. Nun hätte man seit der Erfindung des Integralcalculs die natürlichen Logarithmen wieder hervor suchen und sie in Tabellen vorstellen können. Allein die Neppersche Tafel fehlt in der letzten Ziffer, und so hätte sie neu berechnet werden müssen. Man tröstete sich auch andern Theils damit, daß die natürlichen Logarithmen aus den Briggischen gefunden werden können, wenn man diese mit*
> *2,30258 50929 94045 68401 79914 etc.*
> *multiplicirt. Und so blieben grosse Tafeln von natürlichen Logarithmen unberechnet.*[20]

Die heute geläufige Definition des Logarithmus einer Zahl Z als jene Zahl p, mit der man eine Basiszahl b potenzieren muss um Z zu erhalten, also

$Z = b^p$ und $p = \log_b Z$ $(b > 0 \text{ und } b \neq 1)$,

setzt sich ab der Mitte des 18. Jahrhunderts allmählich durch, nicht zuletzt aufgrund der Arbeiten von **Leonhard Euler** zu diesem Thema sowie der vereinheitlichten Schreibweise von Potenzen.

Für die Logarithmen zur Basis e waren zwei Bezeichnungen gleichzeitig in Gebrauch, die natürlichen und die hyperbolischen. Euler schreibt

19 Beispiel: $\log(\text{Num} * 10^n) = n + \log(\text{Num})$.

20 Lambert 1770, S. 50. Zwei Seiten später ergänzt Lambert, die Integralrechnung mache hyperbolische Logarithmen notwendig und da eine solche Tafel nicht existiert habe er sie selbst berechnet mit Methoden, die er anschliessend erläutert.

> *But if now logarithms may be constructed from this base (*gemeint ist e = 2,7182818...), *these are accustomed to be called natural or hyperbolic, because the quadrature of the hyperbola can be expressed by logarithms of this kind..*[21]

Die Benennung hyperbolisch hielt sich für Tafeln bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts.

Mit der Einführung der Basiszahl *e* und mit den Hilfsmitteln der Differential- und Integralrechnung wird die Mathematisierung der Naturwissenschaften erheblich erleichtert, wofür vollständige Tafeln der hyperbolischen Logarithmen notwendig sind. Zugleich profitiert die Technik von den neuen Werkzeugen der Mathematik, weil physikalische Vorgänge jetzt mathematisch beschrieben und Bauteile im Voraus berechnet und dimensioniert werden können.[22]

Literatur

Burn, R(obert) B., 2001. Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica,* 28, S. 1–17.

Euler, Leonhard, 1748. *Introductio In Analysin Infinitorum.* Engl. Übers. v. Jan Bruce, URL http://www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm (letzter Zugriff 22.12.2021)

Glaisher, James Whitbread Lee, 1874. Report of the Committee ... on Mathematical Tables. *Report of the forty-third meeting of the British Association for the advancement of science.* London.

González-Velasco, Enrique A., 2011. *Journey through Mathematics.*

Gregory, James, 1667. *Vera circuli et hyperbolae quadratura, in propria sua proportionis specie, inventa et demonstrata.*

—, 1668. *Exercitationes Geometricae.*

Heinrich, Georg, 1901. James Gregorys "Vera circuli et hyperbolae quadratura". *Bibliotheca Mathematica* 2 (1901), S. 77–85

21 Euler 1748, Cap. VII, Art. 122, Übers. Jan Bruce.

22 Ein Beispiel hierfür unter zahlreichen ist die Expansions-Dampfmaschine, s. Weiss 2020.

Henderson, James, 1926. *Bibliotheca Tabularum Mathematicarum, Pt. I, – Logarithmic Tables.* Cambridge University, London.

Hofmann, Josef Ehrenfried, 1938. Nicolaus Mercators Logarithmotechnia (1668). *Deutsche Mathematik* 3 (1938), H. 4, S.446-466.

—, 1939. On the Discovery of the Logarithmic Series and Its Development in England up to Cotes. *National Mathematics Magazine,* Vol.14, No. 1 (Oct. 1939), S. 37-45

Hutton, Charles, 1812. *Tracts on mathematical and philosophical subjects,* Vol. 1.

Lambert, Johann Heinrich, 1770. *Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen: zur Erleichterung und Abkürzung der bey Anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen.*

Maseres, Francis, 1791-1807. *Scriptores logarithmici or, A collection of several curious tracts on the nature and construction of logarithms*, 6 Bde.

Mercator, Nicolaus, 1668a. *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata et facilis.*

—, 1668b. Some Illustration of the Logarithmotechnia of M. Mercator, who communicated it to the Publisher. *Philosophical Transactions,* Vol. 3 (1668), S. 753-764.
S. a. Maseres Scriptores, Bd. 1, S. 227-232.

Newton, Isaac, 1736. *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-lines.* Translated from the author's Latin original not yet made publick... By John Colson.

Sarasa, Alphonse Antonio de, 1649. *Solutio problematis a R.P.Marino Mersenno Minimo propositi.*

Speidell, Euclid, 1688. *Logarithmotechnia: The making of numbers called logarithms to twenty five places from a geometrical figure: with speed, ease, and certainty: the like not hitherto published.*

Saint-Vincent, Grégoire de (Gregorius a Sancto Vincentio), 1647. *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, decem libris comprehensum.*

Volkert, Klaus, 1996. Die Quadratur der Hyperbel des Gregorius a San Vincentio. *Journal f. Mathematik-Didaktik,* V.17.1 (Mrz. 1996), S. 3-20

Weiss, Stephan, 2013. *Anmerkungen zur Idee der historischen Logarithmen.* URL http://www.mechrech.info/publikat/IdeeLoga.pdf

—, 2020. The Expansion Steam Engine and the Hyperbolic Logarithm from Farey to Dixon. *Journal of the Oughtred Society*, Vol.29, N.2, (Fall 2020), S. 35-40.
dt. *Die Expansions-Dampfmaschine und der hyperbolische Logarithmus von Farey bis Dixon.*
URL http://www.mechrech.info/publikat/Weiss-Farey_Dixon_expansive-dt.pdf

—, 2021. *Die proportionale Definition des Logarithmus.*
URL http://www.mechrech.info/publikat/Weiss-DefLogsProp-dt.pdf

●