Die Expansions-Dampfmaschine und der hyperbolische Logarithmus von Farey bis Dixon*

Stephan Weiss

In einem früheren Beitrag über das Entwerfen von Dampfmaschinen mit Hilfe des Soho-Rechenschiebers[1] bin ich kurz auf die Berechnung einer Expansions-Dampfmaschine eingegangen. Dieses Thema soll im Folgenden erneut aufgegriffen werden mit dem Ziel, seine rechentechnische Behandlung, im Besonderen die Verwendung des natürlichen Logarithmus, herauszustellen. Als Eingrenzung des betrachteten Zeitraums dienen die beiden Lehrbücher von Farey[2] 1827 und von Dixon[3] 1875. Sie erschienen nach dem ersten und vor dem letzten Viertel des 19. Jahrhunderts mit einem Abstand von nahezu 50 Jahren. Beide Autoren gehen ausführlich auf die Berechnung von Dampfmaschinen ein und erläutern den Gebrauch eines Rechenschiebers hierzu.

Eine kurze Erklärung der Funktion einer Expansions-Dampfmaschine soll verständlich machen, welche Rolle der hyperbolische oder natürliche Logarithmus dabei spielt.

Mit mehreren Erfindungen und Verbesserungen hat der Techniker James Watt (1736 – 1819) die Entwicklung von Dampfmaschinen massgeblich beeinflusst. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts beschrieb er u. a. im Patent GB17821321 aus dem Jahr 1782[4] die Expansions-Dampfmaschine. In dieser Maschine wird der Kolben nicht über den gesamten Arbeitshub mit dem vollen Dampfdruck beaufschlagt, sondern nur noch anfangs über eine vorgegebene Strecke. Dann schliesst das Einlassventil und der Dampf expandiert mit stetig sinkendem Druck weiter. In Bild 1[5] ist der Druckverlauf in einem Arbeitshub dargestellt unter der Annahme, dass das Einlassventil nach dem ersten Viertel des Kolbenhubes schliesst.

---

* Engl. The Expansion Steam Engine and the Hyperbolic Logarithm from Farey to Dixon. *Journal of the Oughtred Society* Vol. 29:2, Fall 2020, p. 35-40 (with two additional pictures of Dixon's slide rule).

1 WEISS, Stephan, 2019, *Der Entwurf einer Dampfmaschine mit Hilfe des Soho-Rechenschiebers,* URL http://www.mechrech.info/publikat/Weiss-SlideRule_SteamEngine-dt.pdf,
Engl. The Design of a Steam Engine by Means of the Soho Slide Rule, *Journal of the Oughtred Society* 28:2, Fall 2019.

2 FAREY, John, 1827, *A treatise on the steam engine: historical, practical, and descriptive*, London.

3 DIXON, Thomas, 1875, *Treatise on the Arrangement, Application, and Use of Slide Rules,* Bradford. 2ed. with supplement 1881

4 Originaltitel A.D. 1782, No 1321. Specification of James Watt. – Steam Engines.

5 Das Bild ist aus MATSCHOSS, Conrad, *Geschichte der Dampfmaschine*. Berlin, 1901, S .73 entnommen und vom Verfasser ergänzt. Ein identisches Bild, mit Markierungen versehen, findet sich im o. g. Patent für James Watt.

Im ersten Viertel des Hubes von Position 0 bis Position 1 wird der Kolben mit dem vollen und konstanten Dampfdruck, im Diagramm normiert auf p1 = 1, beaufschlagt.

In diesem Abschnitt errechnet sich die Arbeit des Kolbens aus Druck p1 * Kolbenfläche F * Weg des Kolbens x = 1 oder Druck p1 * Volumen von 0 bis 1. Diese Arbeit entspricht der rechteckigen Fläche des Diagramms innerhalb der Positionen 0 und 1.

Nach dem Schliessen des Einlassventils vergrössert sich das Volumen des vorhandenen Dampfes während der Druck abnimmt. Mit der Annahme, dass sich der Dampf wie ein ideales Gas nach dem Gesetz von Boyle und Mariotte, Druck p mal Volumen V ist eine Konstante, verhält und weil sich die Fläche des Kolbens nicht ändert kann man auch schreiben p ~ 1/x mit x als dem zurückgelegten Kolbenweg. In der Position 1 beträgt der Druck noch p1, dann verringert er sich in der Position 2 bei doppeltem Volumen auf 1/2, in der Position 3 bei dreifachem Volumen auf 1/3 und in der Position 4 schliesslich auf 1/4.

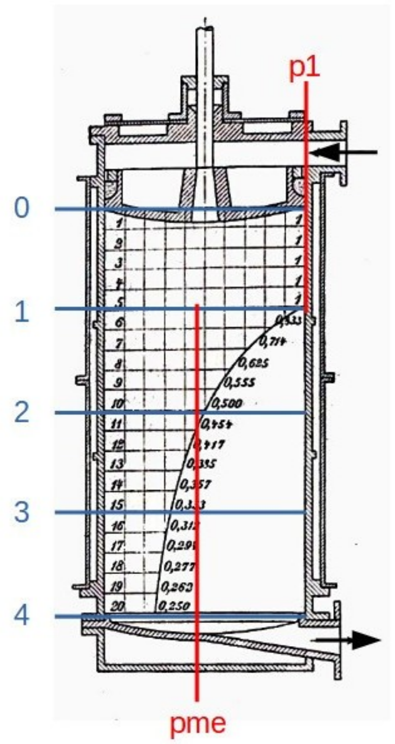


Bild 1: Der Druckverlauf im Zylinder bei Expansion

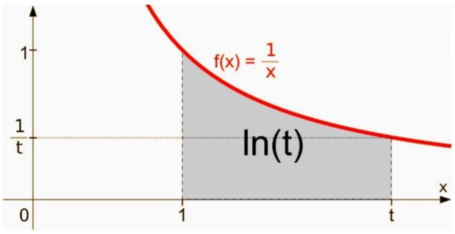
Wegen des stetig abnehmenden Druckes ab Position 1 kann die Arbeit des Kolbens nicht mehr unmittelbar aus dem Produkt Druck p * Kolbenfläche F * Weg des Kolbens x berechnet werden. Benötigt wird ein angenommener mittlerer Druck pme während der Expansion, der in der Rechnung das gesuchte Ergebnis bringt. Anders ausgedrückt, die Fläche des angenommenen Rechtecks von Position 1 bis 4 mit der Höhe pme muss gleich der kariert markierten Fläche unter dem tatsächlichen Verlauf des Druckes sein.

Eine Lösung ergibt sich aus der Tatsache, dass der Druckverlauf p ~ 1/x eine Hyperbel darstellt, hier im rechtwinkeligen Koordinatensystem. Dann entspricht die Fläche unter der

Kurve von x = 1 bis x = t dem natürlichen Logarithmus ln(t) (s. Bild 2)[6]. Mit ln(4) = 1,386 erhält man für den mittleren Druck pme = ln(4)/3 = 0,462 und die Arbeit des Kolbens über den ganzen Hub beträgt (1*p1 + 3*pme)*Kolbenfläche F = 2,386*F.

Häufig wurde auch noch die Kolbenfläche F = 1 gesetzt, weil man dann die Drücke und die Arbeit unter verschiedenen Bedingungen leichter vergleichen kann.

Wird der Kolben für einen anderen Bruchteil als ein Viertel seines Hubes mit dem vollen Druck beaufschlagt ergeben sich auch andere Zahlenwerte.



$$\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \ln(t)$$

Bild 2: Die Hyperbel f(x) = 1/x

Ergänzend sei angemerkt, dass Watt nicht auf diesem Weg vorgeht. Er bestimmt den mittleren Druck durch Aufsummieren von 15 Ordinaten als Streifen mit gleichen Breiten und mit ihren jeweiligen Drücken unter der Hyperbel.

Auf der Basis der errechneten Ergebnisse stellt Watt den Vorteil der Expansions-Dampfmaschine heraus. Wird wie hier der Kolben nur über ein Viertel und nicht über die ganze Länge seines Hubes mit dem vollen Dampfdruck beaufschlagt reduziert sich der Kohleverbrauch für die Verdampfung auf ein Viertel, die Arbeit des Kolbens jedoch nur auf etwas mehr als die Hälfte.
Mit kleineren Verhältnissen von Volldruck zu Expansion wird der Vorteil noch grösser, allerdings treten dann andere technische Probleme auf.

Eine Einschränkung muss berücksichtigt werden. Die Rechnung ergibt nicht genau den mittleren Druck, weil Dampf kein ideales Gas ist, weil die Temperatur des Zylinders nicht konstant bleibt und vor allem weil das Öffnen und Schliessen der Ventile den Druckverlauf beeinflussen und der restliche Dampf im Rohr vom Ventil bis zum Zylinder ebenfalls eine Rolle spielt. Hierfür müssen weiter gehende Berechnungen oder Korrekturfaktoren aus der Erfahrung mit gebauten Maschinen angewendet werden.

Für die Berechnung einer Expansions-Dampfmaschine nimmt der Ingenieur und Patentanwalt John Farey Jr. (1791 – 1851) den natürlichen Logarithmus zu Hilfe. In der Vergangenheit

[6] Die Skizze oben ist aus Wikipedia, Suchbegriff natürlicher Logarithmus, engl. *Logarithm*, entnommen (letzter Zugriff 15.6.2020).

nannte man den Logarithmus zur Basis e auch den hyperbolischen Logarithmus, weil er, wie oben gezeigt, Flächen unter der Hyperbel quantifiziert.

Farey übernimmt in sein Werk Textabschnitte aus der Ecyklopaedia Britannica. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts war man sich offensichtlich nicht sicher, ob alle Ingenieure eine Tafel des natürlichen Logarithmus besitzen:

> „*As few professional engineers are possessed of a table of hyperbolic logarithms, while tables of common logarithms are, or should be, in the hands of every person who is much engaged in mechanical calculations, the following method may be practised.*“[7]

Mit der „folgenden Methode“, auf die oben Bezug genommen wird, ist die Umrechnung ln(x) = 2,30258...*log(x) gemeint. Sie wird im nächsten Rechenbeispiel verwendet.

Die Kraft auf den Kolben bei Maximaldruck betrage 6333 lbs. Der Hub sei 6 ft lang, nach 1,5 ft wird die Dampfzufuhr abgestellt. Daraus ergibt sich
6 /1,5 = 4; log(4) = 0,602; ln(4) = log(4) * 2,3026 = 1,386; 1 + 1,386 = 2,386; 6333 lbs * 2,386 = 15110 lbs „aufsummierter Druck“ (im Original *Accumulated Pressure*).[8] Das Ergebnis trägt keine in der Technik übliche Einheit für die Arbeit, weil die Längeneinheit dem Kolbenhub ohne Expansion entspricht.

Als Arbeitshilfe stellt Farey eine Tafel des sog. hyperbolischen Logarithmus für die Numeri 1 bis 10 in Schritten von 0,05, 10 bis 100 in Schritten von 5 sowie für 1000 und 10000 zur Verfügung.[9]

Farey erläutert eine Vielzahl von unterschiedlichen Berechnungen, die während der Auslegung einer Dampfmaschine auftreten können. Er greift dabei auf einen Rechenschieber vom Typ Soho und auf die von ihm verbesserten Variante zurück. Eine Skala des natürlichen Logarithmus auf den Rechenschiebern wird in seinem Werk nirgendwo erwähnt.

In einem mathematisch-technischen Lehrbuch, das auf Logarithmen zurückgreift, darf deren Definition oder zumindest eine Erklärung hierzu nicht fehlen. Farey zeigt, dass der Logarithmus einer Zahl jener Exponent in einer Potenz von 10 ist, der eben diese Zahl hervorbringt. Gleichzeitig verwendet er die historische Definition

> *„Logarithms are a series of artificial numbers, adapted in a particular manner to a series of real numbers,..“*[10]

Diese Sicht gebraucht schon John Napier (1550 –1617), der die erste brauchbare Logarithmentafel berechnete und im Jahr 1614 veröffentlichte. Er benutzte sie als Erklärung neben dem Begriff Logarithmus.[11]

---

7 FAREY 1827, S. 343. Aus Encyklopaedia Britannica, 3. Aufl, Bd. 17, (1797), Begriff *Steam Engine*

8 FAREY 1827, S. 343.

9 FAREY 1827, S. 345. Mit gleicher Stufung auch bei BOURNE, John, 1851 u.ö., *A Treatise on the Steam Engine*. London.

10 FAREY 1827, S. 533.

11 NAPIER, John, 1619, *Mirifici logarithmorum canonis constructio,* Edinburgh, *Positio Prima*. In das Englische übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Jan Bruce.
URL http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html (letzter Zugriff 15.6.2020)

Im Verlauf des 19. Jahrhunderts wird der natürliche Logarithmus entweder aus solchen Tafeln entnommen oder aus dem Zehner-Logarithmus berechnet. Der Ingenieur Martin Benoît zeigt in seinen Erläuterungen zum Rechenschieber aus der Mitte des 19. Jahrhunderts[12] wie man hierbei vorgeht. Er gibt auf S. 436 eine einfache Skizze der Einstellung des Rechenschiebers, wie sie zu dieser Zeit üblich sind[13] (Bild 3).

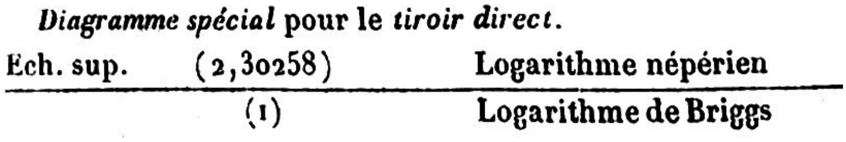


Bild 3: Umrechnung der Logarithmen bei Benoît

Weil die Genauigkeit des Rechenschiebers auf wenige Stellen begrenzt ist verweist Benoît auf die Tafeln von Callet[14]. Sie enthalten u. a. die 1- bis 100-fachen der Umrechnungsfaktoren von dekadischen Logarithmen auf natürliche und umgekehrt, angegeben auf 23 Nachkomma-stellen.
Eine Skala auf dem Rechenschieber mit einer Teilung nach dem natürlichen Logarithmus erwähnt auch Benoît nicht.

In der Zeit zwischen Farey und Dixon ändert sich wenig an diesem Zustand. Zu erwähnen ist der neue Entwurf eines Rechenschiebers des Offiziers in der Französischen Armee und Mathematikers Amédée Mannheim aus dem Jahr 1859. Er verwendet die Skalen A=B und C=D, allerdings in einer anderen Teilung als auf Watts Soho-Rechenschieber, sodass ein Läufer notwendig wird. An einigen Ausführungen des Rechenschiebers Typ Mannheim sind auch trigonometrische Skalen sowie die Skala des Logarithmus zur Basis 10 angebracht. Der natürliche Logarithmus spielt so gut wie keine Rolle.

Das Thema Berechnung einer Expansions-Dampfmaschine mit Hilfe eines für technische Zwecke angepassten Rechenschiebers wird im Jahr 1875 in einem Lehrbuch erneut aufge-griffen. Der bereits oben erwähnte Ingenieur Thomas Dixon stellt in seiner Abhandlung den neuartigen Entwurf seines Rechenschiebers in den Vordergrund.[15] Er beschreibt die Ausge-staltung und Anordnung der Skalen darauf und erläutert seine Verwendung an Beispielen aus

[12] BENOÎT, P(hilippe) M(artin) N(arcisse), 1853, *La règle à calcul expliquée*, Paris.

[13] WEISS, Stephan, 2017, *Die Methodik des Unterrichts am logarithmischen Rechenschieber in historischer Abfolge,* URL http://www.mechrech.info/publikat/RS_Methodik_dt.pdf
Engl. The Methodology of Teaching a Logarithmic Slide Rule in Historical Sequence, *Journal of the Oughtred Society* 26:2, Fall 2017.

[14] CALLET, François, 1795 u.ö, *Tables Portatives de Logarithmes*, Paris.

[15] WYMAN, Thomas, 1996. The Thomas Dixon Engineer‘s Slide Rule, *Journal of the Oughtred Society, 5:2,* S. 68.
Bilder im International Slide Rule Museum: Aston And Mander Makers - Dixon Style Slide Rule.
URL https://www.sliderulemuseum.com/Rarities.htm (letzter Zugriff 15.6.2020).
Bilder in Science Museum Group: T.Dixon's slide rule.
URL . https://collection.sciencemuseumgroup.org.uk/objects/co60507/t-dixons-slide-rule-boxwood-19-1-2-x-2-1-4-x-slide-rule-dixon. (letzter Zugriff 7.5.2020)

der praktischen Mathematik, aus der technischen Mechanik und auch beim Entwurf von Dampfmaschinen.

Zunächst geht Dixon auf das Besondere der Logarithmen ein. Er greift dabei wie schon Farey vor ihm auf die historische Gegenüberstellung einer arithmetischen Folge mit geometrischen Folgen zurück und leitet daraus ab

> *„And logarithms being artificial numbers so contrived that the sum of the Logs. of any two numbers = the Logarithm of the Product of those numers… “.*[16]

Er sagt damit, dass Logarithmen künstliche Zahlen sind, dergestalt entworfen, dass Multiplikationen auf Additionen, Divisionen auf Subtraktionen und so weiter zurückgeführt werden können. Es erstaunt wie lange sich historische Interpretationen auch in der Mathematik halten können. Erst im weiteren Verlauf spricht er die Logarithmen von Briggs an mit ihren Zuordnungen log(1)=0; log(10)=1; log(100)=2 und so weiter.

Nach dieser Einleitung kommt er auf seinen Rechenschieber zu sprechen. Die Abmessungen des Rechenschiebers betragen 49,5 x 5,7 x 1,95 cm (19 1/2" x 2 1/4" x 5/8").[17] Im Vorwort nennt Dixon die Firma *Aston and Mander* in England als Hersteller.

Sein Rechenschieber trägt auf der Vorderseite, bezeichnet mit *No. 1,* von oben nach unten die Skalen

CUBE ROOT 1...10 ≡ $\sqrt[3]{N}$
(s) **N** 1...10...100...1000
A wie N
(s) **B** und **C** wie N
SQ.RT D 1...10...31,62 ≡ $\sqrt{N}$

Die in obiger Aufstellung mit (s) markierten Skalen liegen auf 2 Schiebern, die nur auf der Vorderseite sichtbar und wirksam sind.

Die Rückseite, mit *No. 2* bezeichnet, trägt von oben nach unten die Skalen

COM.LOGS 0...1,0 ≡ log(NUMBERS)
NUMBERS 1...10
HYP.LOGS 0...2,3 ≡ ln(NUMBERS)
COSINES 90°...0° ≡ cos(), bezogen auf die Skala NUMBERS darunter
SINES 0°...90° ≡ sin(), dergl.
NUMBERS 0...1

Die untere Schmalseite, mit *No. 3* markiert, trägt ein Längenmass mit den Teilungen 3/4 inch, 1 inch und 1.5 inch.
Die obere Schmalseite ist mit *No. 4* markiert und trägt ein Längenmass mit den Teilungen 1/4 inch und 1/2 inch.

[16] DIXON 1875, S. 8.

[17] Angaben zum Objekt von der Science Museum Group.

Mit den zusätzlichen Skalen und ihrer Anordnung unterscheidet sich Dixons Zusammenstellung wesentlich von den anderen zu dieser Zeit angebotenen Rechenschiebern. Dies trifft vor allem für die Skala des natürlichen bzw. hyperbolischen Logarithmus zu. Zeitgenössische Beschreibungen heben die neue Zusammenstellung ausdrücklich hervor. So schreibt der Sammlungskatalog des South Kensington Museum aus dem Jahr 1876 über den Rechenschieber

> „*Slide Rule, of boxwood, arranged by Mr. Dixon, Lowmoor Ironworks. Aston & Mander. In addition to the lines of the ordinary slide rule this instrument contains: Lines of common and hyperbolic logs and numbers. Lines of sines, cosines, and numbers. Lines of cubes and roos, direct.*“[18]

Dixon vergleicht die Ausgestaltung seines Instruments mit den bereits existierenden und stellt die erweiterten Möglichkeiten bei der Anwendung heraus

> „*…and as the arrangement now proposed and hereafter described has its lines A,B,C,D similarly marked to the Soho and Routledge, so the operations (concerning those lines only) will be alike for all three; while the lines on the proposed instrument, extra to A,B,C,D, have a special application to purposes of calculations hereafter explained, for which the other two instruments are not adapted.* “[19]

Einige Jahre später bewertet ein Technik-Magazin Dixons Rechenschieber in einer Ausstellung

> „*Dixon shows his 'triple radius double slide rule' with which very complex operations may be readily performed.*“[20]

Bei der Durchsicht der Beispielrechnungen bei Dixon fallen vor allem drei Gruppen von Aufgabenstellungen auf, für die sein Rechenschieber geeignet sein soll. Es sind dies
1. die Behandlung von Potenzen mit gebrochenen Exponenten, wie sie in der Mechanik vorkommen,
2. aus Multiplikationen, Divisionen und Wurzeln zusammengesetzte Rechnungen mit mehreren Zahlenwerten,
3. Berechnungen in Verbindung mit dem hyperbolischen Logarithmus ohne Zwischenrechnungen und ohne den Gebrauch einer Logarithmentafel. Dies trifft im Besonderen bei der Auslegung von Expansions-Dampfmaschinen zu. Hierfür gibt er fünf Beispielrechnungen.[21]

Die erste lautet wie folgt:
Der Maximaldruck beträgt 30 lbs. per sq.inch, der Hub 60 inches. Nach 20 inches wird die Dampfzufuhr gestoppt. Wie gross ist der mittlere Druck über den gesamten Hub?
1. 60/20, „*Or, by Slide Rule, 60 on A — 20 on N or B gives 3 on A for the number of times the steam is expanded.* “ An manchen Stellen im Text gibt Dixon die Einstellung des Rechenschiebers vor.
2. Auf der Rückseite des Rechenschiebers wird für 3 auf der Skala Num der Wert 1,098 auf der Skala Hyp.Log. abgelesen.

---

[18] Catalogue of the Special Loan Collection of Scientific Apparatus at the South Kensington Museum 1876, 3rd ed., London 1877, Section 1. – Arithmetic.

[19] DIXON 1875, S. 13.

[20] Van NOSTRAND'S Engineering Magazine , Vol. XXXIII, July-Dec 1885, S. 517 li. ob.

[21] DIXON 1875, S. 135ff.

3. Die normierte Arbeit über den gesamten Hub beträgt 1+1,098 = 2,098, der mittlere Druck über den ganzen Hub somit 2,098/3=0,7 lbs per sq.in.
4. Der mittlere Druck über den gesamten Hub beträgt 0,7*30=21 lbs. per sq.in.

Die Skala Hyp.Log wird wie eine grafische Logarithmentafel auf dem Rechenschieber verwendet, mehr ist wegen ihrer Zuordnung nicht möglich, weil sie auf der Rückseite des Rechenschiebers angebracht ist, wo keine Schieber vorhanden sind.

Soweit bisher bekannt war Dixon der erste, der die Skala des natürlichen Logarithmus auf einem Rechenschieber anbrachte. Deshalb ist in seinem Werk auch keine tabellarische Auflistung der natürlichen Logarithmen enthalten, jedoch ein eigenes Kapitel über hyperbolische Logarithmen sowie zahlreiche Ablesebeispiele an dieser Skala.

Der Grund für die Anbringung der Skala mit natürlichen Logarithmen liegt eindeutig in ihrer Verwendung für die Berechnung von Expansions-Dampfmaschinen.

Obwohl mit dieser neuen Skala nicht mehr notwendig führt Dixon dennoch auch das übliche Berechnen des natürlichen Logarithmus vor:

„*Common Log. on A + 2,3 on N or B = Hyp. Log. on A.*“ [22]

Neben dem Soho-Rechenschieber als Ganzes ist die Skala des natürlichen Logarithmus ein weiteres Beispiel für die Anpassung eines Rechenschiebers an die Erfordernisse des Maschinenbaus.

In der Zeit nach Dixon wird eine Skala des natürlichen Logarithmus auf Rechenschiebern sehr selten angebracht. Mit Anfang des 20. Jahrhunderts tritt sie in veränderter Ausführung als Log-Log- oder LL-Skalen neu auf. Aber das ist eine andere Geschichte.

[22] DIXON 1875, S. 41.